计算数学丛书

数值有理逼近

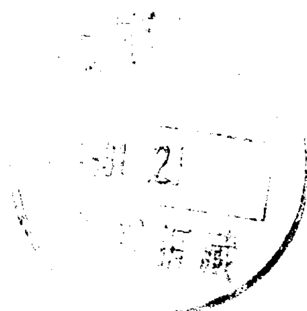
王仁宏



计算数学丛书

数值有理逼近

王 仁 宏



上海科学技术出版社

内 容 提 要

借助于有理分式函数为工具的函数逼近理论，是计算数学、特别是数值逼近理论及应用中的一类重要课题．本书较全面地对有理函数插值，有理 Чебышев 逼近，Padé 逼近，有理样条函数逼近及其它有关方面的理论与数值计算方法作了详细介绍．本书可供高等学校教师，高年级学生，研究生作教学参考书．也可供从事计算数学理论研究和数值计算的科技工作者参考．

计算数学丛书
数 值 有 理 逼 近
王 仁 宏
上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路 450 号）
新华书店上海发行所发行　浙江湖州印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32　印张 6　字数 130,000
1980 年 8 月第 1 版　1980 年 8 月第 1 次印刷
印数 1—95,00
书号：13119·851　定价：（科四）0.58 元

出　版　说　明

《计算数学丛书》是为了适应计算数学和计算机科学的发展，配合高等院校计算数学教学的需要而组织的一套参考读物。读者对象主要是高等院校数学系和计算机科学系的学生、研究生，亦可供高等院校数学系和计算机科学系的教师以及工矿企业、科研单位从事计算工作的技术人员参考。

本丛书向读者介绍近代计算方法的一些主要进展及其适用范围和实用效果。每种书集中介绍一个专题，针对本专题的近代发展作综合性的介绍，内容简明扼要，重点突出，有分析，有评价，力图使读者对该专题的动向和发展趋势得到一个完整的了解。

本丛书已拟定的选题计有：《线性代数与多项式的快速算法》、《数论变换》、《数值有理逼近》、《矩阵特征值问题》、《Sobolev 空间引论》、《计算组合数学》、《样条与逼近》、《有限条形法》、《广义逆矩阵及其计算方法》、《非线性方程迭代解法》、《奇异摄动》、《Walsh 函数及其应用》、《多项式最佳逼近》、《坏条件常微分方程数值解》、《误差分析》、《最小二乘问题的数值解法》、《快速傅里叶变换》、《板壳问题非协调方法》、《外推法》、《并行算法》、《Padé 逼近》、《Monte Carlo 方法》、《差分格式理论》、《高维偏微分方程数值解》、《初值问题差分方法》等二十余种，将于一九八〇年初起陆续出版。

引　言

著名的 Weierstrass 定理告诉我们，任何有界闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 都可以用多项式序列一致逼近. 即存在多项式序列 $\{P_n(x)\}$，使得在区间 $[a, b]$ 上一致地有

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x).$$

虽然多项式是函数的一种非常好的逼近工具，但是多项式逼近也有它的不足之处. 主要因为多项式是幂级数的特殊情况，其在一点附近的性质就足以决定它在整个实数轴上的性质. 而这种特性恰好是许多物理现象所不具备的. 事实上，许多物理现象中各个量之间的关系往往具有互相割裂的特征，它们在两个区间上的性状甚至可能完全毫不相干. 这自然就导致了 1946 年 I. J. Schoenberg 开创样条函数这个新的逼近工具.

对于具有极点的函数来说，采用多项式、甚至多项式样条作为逼近工具显然都是不大合适的. 可以想象，采用多项式的另一种最简单的推广——有理函数作为逼近工具是恰当的.

那么，对于没有极点的函数来说，有理函数逼近的意义又如何呢？请看 Z. Kopal 在参考文献 [48] (pp. 25—43) 中所举的一个例子：

$\ln(1+x)$ 有如下的连分式展开式：

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} + \frac{1^2x}{2} + \frac{1^2x}{3} + \frac{2^2x}{4} + \frac{2^2x}{5} + \cdots.$$

取它的渐近分式，即可得 $\ln(1+x)$ 的有理逼近：

$$R_1(x)=\frac{2x}{2+x},$$

$$R_2(x)=\frac{6x+3x^2}{6+6x+x^2},$$

$$R_3(x)=\frac{60x+60x^2+11x^3}{60+90x+36x^2+3x^3},$$

$$R_4(x)=\frac{420x+630x^2+260x^3+25x^4}{420+840x+540x^2+120x^3+6x^4}.$$

一般说来，$R_n(x)$ 是 $\ln(1+x)$ 的 $[n/n]$ 级 Padé 逼近. 它与 $\ln(1+x)$ 的 Taylor 展开前 $2n$ 项重合. 并且 $R_n(x)$ 的参数个数与 $\ln(1+x)$ 的 Taylor 展开前 $2n$ 项 $T_{2n}(x)$ 的参数个数相同.

现在我们来比较一下，用 $R_n(1)$ 和 $T_{2n}(1)$ 作为 $\ln 2$ 的逼近时误差 ε_R 和 ε_T 的大小情况.

n	$R_n(1)$	ε_R	$T_{2n}(1)$	ε_T
1	0.667	0.026	0.50	0.19
2	0.69231	0.00084	0.58	0.11
3	0.693122	0.000025	0.617	0.076
4	0.69314642	0.00000076	0.634	0.058

($\ln 2=0.69314718\cdots$)

它说明 $R_4(1)$ 与 $T_8(1)$ 的精确程度竟相差 10 万倍.

另外，1964 年 D. J. Newman (*Michigan Math. Jour.*, **11**(1964), 11—14) 指出：可以找到一个分子、分母皆为 n 次的有理分式序列 $r_n(x)$，使得

$$\left|\,|x|-r_n(x)\right|\leqslant 3e^{-\sqrt{n}},\qquad -1\leqslant x\leqslant 1.$$

它显然比通常 n 次多项式的最佳逼近阶 $O(1/n)$ 优越得多.

这些事实说明，开展函数的有理分式逼近问题的研究是

十分有意义的．正因为如此，近十多年来，有理逼近实已成为计算数学、特别是数值逼近理论与应用中一类很引人注目的课题．

本书共分五章．前四章里，我们分别讲述了有理函数插值，有理 Чебышев 逼近，Padé 逼近方法和有理样条函数方法．所述各章不仅有重点地讨论了有关的一些理论问题，而且介绍了若干较有用的数值计算方法．由于有些有理逼近方法并不完全属于前四章的范畴，因此在本书第五章里，介绍了一批数值有理逼近方法．

鉴于作者水平所限，在材料的取舍上可能会有不妥之处．有些内容也难免会有不足或谬误之处，敬请广大读者批评指正．

在本书的初稿完成以后，徐利治教授在百忙中抽出时间对本书初稿进行了审阅．吉林大学数值逼近讨论班的同志、特别是周蕴时同志以及合肥工业大学朱功勤副教授均大力支持本书的写作，并仔细审阅了本书的初稿．上海科学技术出版社理科编辑室，自始至终关心本书的写作．借此机会，作者仅向他们致以衷心的感谢．

王仁宏

于长春吉林大学数学系

1979.7.

目 录

第 1 章

有理函数插值

出于和多项式插值同样的理由，借助有理函数作为工具的有理插值问题的研究，无论从理论上还是实际上都是十分有意义的.

由于有理函数插值并不总是存在的，所以我们在本章§1和§2中，着重讨论有理函数插值的存在唯一性问题.

在§3中，主要是讨论用有理函数作切触插值的问题. 其中主要介绍了Salzer和Wuytack的有关理论.

§4中，为适应解决实际问题的需要，我们介绍了若干实际计算有理插值分式的具体方法. 其中包括Stoer方法，Thiele方法，Salzer方法和Wuytack方法等.

§1 有理函数插值问题及唯一性

设已给定$m+n+1$个不同的点

$$x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_{m+n} \tag{1·1}$$

和相应的函数值

$$f(x_0),\ f(x_1),\ \cdots,\ f(x_{m+n}). \tag{1·2}$$

所谓有理函数插值问题，乃是寻求有理分式函数

$$R_{m,n}(x)=\frac{N_m(x)}{D_n(x)}=\frac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0}, \tag{1·3}$$

使之满足插值条件

$$R_{m,n}(x_j)=f(x_j),\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ m+n, \qquad (1\cdot4)$$

其中 $N_m(x)$ 与 $D_n(x)$ 分别为 x 的 m 与 n 次多项式, m 与 n 是给定的非负整数 $(m,\ n\geqslant0)$. 今后将把次数不超过 m 的多项式类记为 H_m. 即

$$N_m(x)\in H_m,\ D_n(x)\in H_n.$$

人们自然会问,是否一定会存在由(1·3)式给出的那种类型的有理分式函数,使得插值条件(1·4)得以满足呢?

我们知道, 当 $n=0$ 时, $R_{m,0}(x)=N_m(x)$ 是 m 次多项式. 于是按多项式插值的理论,插值问题(1·3)、(1·4)的解是存在并且唯一的. 那么,当 $n>0$ 时插值问题(1·3)、(1·4)的解是否也存在唯一呢? 且看下面两个例子.

例 1 假定 $m=0$, 且对某些 j 和 k,

$$f(x_j)=0,\ f(x_k)\neq0.$$

则显然不可能存在有理分式

$$R_{0,n}(x)=\frac{a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0}$$

满足这个插值问题.

例 2 假定 $m=n=1$, 且

$$f(x_1)=f(x_2)\neq f(x_3).$$

则必然有
$$\frac{a_1x_1+a_0}{b_1x_1+b_0}=\frac{a_1x_2+a_0}{b_1x_2+b_0}.$$

从而
$$(a_0b_1-a_1b_0)(x_2-x_1)=0.$$

因为 $x_1\neq x_2$, 所以 $a_0b_1=a_1b_0$. 不难证明 $b_1\neq0$. 事实上, 当 $b_1=0$ 时 $R_{1,1}(x)$ 退化为一次多项式, 它自然不可能满足本例所给的插值条件了. 因而可得

$$a_0=a_1b_0/b_1,$$

并且
$$R_{1,1}(x)=\frac{a_1x+a_1b_0/b_1}{b_1x+b_0}=\frac{a_1(b_1x+b_0)}{b_1(b_1x+b_0)}=\frac{a_1}{b_1}$$

是一常数. 这样一来,也就不可能有

$$R_{1,1}(x_1) \neq R_{1,1}(x_3).$$

这说明本例所给的有理函数插值问题是无解的.

从上述两个例子不难看出,插值问题(1·3)、(1·4)的解是否存在是要有条件的. 在给出有理插值问题解存在的条件之前,我们先来给出一个唯一性定理.

定义 下列两个有理分式函数

$$R_1(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \quad R_2(x) = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} \tag{1·5}$$

称为恒等,记为 $R_1(x) \equiv R_2(x)$, 如果存在一个非零常数 a, 使得

$$P_2(x) = aP_1(x), \ Q_2(x) = aQ_1(x).$$

由 (1·5) 所示的两个有理分式函数 $R_1(x)$ 和 $R_2(x)$ 称为是等价的,如果

$$P_1(x) \cdot Q_2(x) \equiv P_2(x) \cdot Q_1(x). \tag{1·6}$$

此时常记为 $R_1(x) \sim R_2(x)$.

显然,按定义所确定的"等价"概念是一个等价关系,即

1° $R(x) \sim R(x)$;

2° 若 $R(x) \sim Q(x)$, $Q(x) \sim S(x)$, 则 $R(x) \sim S(x)$;

3° 若 $R(x) \sim Q(x)$, 则 $Q(x) \sim R(x)$.

不难看出,两个有理分式函数 $R_1(x)$ 和 $R_2(x)$ 等价,必须且只须 $R_1(x)$ 和 $R_2(x)$ 的最简分式函数 $\bar{R}_1(x)$ 和 $\bar{R}_2(x)$ 是恒等的. 此处所谓一个有理函数 $R(x) = P(x)/Q(x)$ 的最简分式函数,乃指当把 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 的最大公因子约去后所得的新的有理函数.

今后,只要两个有理分式 $R_1(x)$ 和 $R_2(x)$ 是等价的,则把它们看作是一个有理分式函数而不加以区别. 亦即今后我们

总是把所有相互等价的有理分式函数看作是同一个有理分式函数，而不再一一声明.

在这种意义上，我们有

定理 1 插值问题(1·3)、(1·4)若有解，则其解必唯一.

证明 设两个有理函数

$$R_{m,n}(x)=\frac{N_m(x)}{D_n(x)}, \quad \overline{R}_{m,n}(x)=\frac{\overline{N}_m(x)}{\overline{D}_n(x)}$$

都满足插值条件(1·4)，则

$$N_m(x_j)\cdot\overline{D}_n(x_j)=\overline{N}_m(x_j)\cdot D_n(x_j), \quad j=0,\ 1,\ \cdots,\ m+n.$$

即

$$N_m(x_j)\cdot\overline{D}_n(x_j)-\overline{N}_m(x_j)\cdot D_n(x_j)=0, \quad j=0,\ 1,\ \cdots,\ m+n.$$

它说明次数不超过 $m+n$ 的多项式 $N_m(x)\cdot\overline{D}_n(x)-\overline{N}_m(x)\cdot D_n(x)$ 居然会有 $m+n+1$ 个互异的零点，这当然只有在

$$N_m(x)\cdot\overline{D}_n(x)\equiv\overline{N}_m(x)\cdot D_n(x)$$

时才有可能. 由定义，此即

$$R_{m,n}(x)\sim\overline{R}_{m,n}(x).$$

定理 1 得证.

定理 1 表明，有理分式插值问题的解只要存在则必唯一. 因此有理函数插值问题的关键问题是存在性问题. 而这个问题的讨论，正是我们下节的中心议题.

§2 有理插值的存在性问题

有理插值问题(1·3)、(1·4)既然不总存在，于是探讨有理插值问题解的存在性条件就是一个十分重要的理论与实际课题.

一般说来，插值问题(1·3)、(1·4)所形成的问题是一个非

线性问题．但是当有理分式函数 $R_{m,n}(x)=N_m(x)/D_n(x)$ 是插值问题(1·3)、(1·4)的解时，当然亦有

$$
\begin{aligned}
&N_m(x_j)-f(x_j)D_n(x_j)\\
&\quad=(a_mx_j^m+\cdots+a_1x_j+a_0)-f(x_j)(b_nx_j^n+\cdots+b_1x_j+b_0)\\
&\quad=0,\ j=0,1,\cdots,m+n. \qquad (2\cdot1)
\end{aligned}
$$

它正是未知参数 $a_m,\cdots,a_0;\ b_n,\cdots,b_0$ 的一个线性方程组.

那末，线性方程组(2·1)的求解问题是否同插值问题(1·3)、(1·4)等价？如果不等价，它们之间到底有什么关系呢？

下面的定理2对这个问题作了一个十分有趣的回答.

定理2([51]) 若线性方程组(2·1)有非平凡解存在，则为使满足插值条件(1·4)的最简分式函数 $R_{m,n}(x)=p_m(x)/q_n(x)$ 存在，必须且只须线性方程组(2·1)的任意非平凡解 $N_m^*(x)$，$D_n^*(x)$ 在约去一切公因子(即约化为两互质多项式)后所得的多项式 $A(x)$，$B(x)$ 仍然是线性方程组(2·1)的解：

$$A(x_j)-f(x_j)B(x_j)=0,\ j=0,1,\cdots,m+n. \qquad (2\cdot2)$$

证明 先证必要性．设 $N_m^*(x)$，$D_n^*(x)$ 是(2·1)的任一组非平凡解：

$$N_m^*(x_j)-f(x_j)\cdot D_n^*(x_j)=0,\ j=0,1,\cdots,m+n.$$

若 $t(x)/v(x)$ 满足插值条件(1·4)：

$$\frac{t(x_j)}{v(x_j)}=f(x_j),\ j=0,1,\cdots,m+n, \qquad (2\cdot3)$$

其中 $t(x)$ 的次数 $=r\leqslant m$，$v(x)$ 的次数 $=S\leqslant n$(即 $t(x)\in H_m$，$v(x)\in H_n$)，且它们为互质的多项式．于是

$$N_m^*(x_j)v(x_j)-D_n^*(x_j)t(x_j)=0,\ j=0,1,\cdots,m+n.$$

因为 $N_m^*(x)v(x)-D_n^*(x)t(x)$ 的次数 $\leqslant m+n$，从而必然有

$$d(x)\{A(x)v(x)-B(x)t(x)\}\equiv0,$$

其中 $d(x)$ 是 $N_m^*(x)$ 与 $D_n^*(x)$ 的最大公因子．因此

$$A(x)v(x)-B(x)t(x)\equiv 0.$$

特别地，亦有

$$A(x_j)v(x_j)-B(x_j)t(x_j)=0,\ \ j=0,\ 1,\ \cdots,\ m+n. \quad (2\cdot 4)$$

因为 $t(x)$ 与 $v(x)$ 是互质的，且 $(2\cdot 3)$ 式成立，所以 $v(x)$ 不可能有实根 $x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_{m+n}$，即 $v(x_j)\neq 0(j=0,\ 1,\ \cdots,\ m+n)$。今以 $v(x_j)$ 除$(2\cdot 4)$式两边，并注意$(2\cdot 3)$式，即得到

$$A(x_j)-f(x_j)\cdot B(x_j)=0,\ \ j=0,\ 1,\ \cdots,\ m+n.$$

必要性得证.

为证充分性，设如上定义的 $A(x)$, $B(x)$ 是方程组 $(2\cdot 1)$ 的解，即$(2\cdot 1)$成立. 于是必有 $B(x_j)\neq 0(j=0,1,\cdots,m+n)$，否则由$(2\cdot 2)$式应有 $A(x_j)=0$，从而与 $A(x)$、$B(x)$ 互质的假定相矛盾. 这样一来，有

$$\frac{A(x_j)}{B(x_j)}=f(x_j),\ \ j=0,\ 1,\ \cdots,\ m+n.$$

即 $A(x)/B(x)$ 是满足插值条件 $(1\cdot 4)$ 的最简有理分式函数. 定理 2 证完.

为了给出便于应用的存在性定理，需先引进行列式 β 和矩阵 $A_j(j=0,\ 1,\ \cdots,\ m+n)$：

$$\beta=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^m & y_0 & x_0y_0 & \cdots & x_0^{n-1}y_0 & x_0^ny_0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m & y_1 & x_1y_1 & \cdots & x_1^{n-1}y_1 & x_1^ny_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_j & x_j^2 & \cdots & x_j^m & y_j & x_jy_j & \cdots & x_j^{n-1}y_j & x_j^ny_j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{m+n} & x_{m+n}^2 & \cdots & x_{m+n}^m & y_{m+n} & x_{m+n}y_{m+n} & \cdots & x_{m+n}^{n-1}y_{m+n} & x_{m+n}^ny_{m+n} \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^m & y & xy & \cdots & x^{n-1}y & x^ny \end{vmatrix},$$

$$A_j=\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{m-1} & y_0 & x_0y_0 & \cdots & x_0^{n-1}y_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{j-1} & x_{j-1}^2 & \cdots & x_{j-1}^{m-1} & y_{j-1} & x_{j-1}y_{j-1} & \cdots & x_{j-1}^{n-1}y_{j-1} \\ 1 & x_{j+1} & x_{j+1}^2 & \cdots & x_{j+1}^{m-1} & y_{j+1} & x_{j+1}y_{j+1} & \cdots & x_{j+1}^{n-1}y_{j+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{m+n} & x_{m+n}^2 & \cdots & x_{m+n}^{m-1} & y_{m+n} & x_{m+n}y_{m+n} & \cdots & x_{m+n}^{n-1}y_{m+n} \end{pmatrix},$$

其中　　$y=f(x)$, $y_j=f(x_j)$, $j=0, 1, \cdots, m+n$.

若对所有的 $j(j=0, 1, \cdots, m+n)$ 而言，A_j 都是非奇异的，则 β 作为 x、y 的多项式来说是不恒为 0 的. 事实上，若 $\beta=\beta(x, y)\equiv 0$, 则其最后一行的各个代数余子式为 0. 特别地

$$\beta_1=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{m-1} & y_0 & x_0y_0 & \cdots & x_0^{n-1}y_0 & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{m-1} & y_1 & x_1y_1 & \cdots & x_1^{n-1}y_1 & x_1^m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{m+n} & x_{m+n}^2 & \cdots & x_{m+n}^{m-1} & y_{m+n} & x_{m+n}y_{m+n} & \cdots & x_{m+n}^{n-1}y_{m+n} & x_{m+n}^m \end{vmatrix}=0$$

(它相当于 β 最后一行最后一列上元素 x^ny 的代数余子式，然后把其 $m+1$ 列换到最后一列所得的行列式)，并且

$$\beta_2=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{m-1} & y_0 & x_0y_0 & \cdots & x_0^ny_0 \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{m-1} & y_1 & x_1y_1 & \cdots & x_1^ny_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{m+n} & \cdots & x_{m+n}^{m-1} & y_{m+n} & x_{m+n}y_{m+n} & \cdots & x_{m+n}^ny_{m+n} \end{vmatrix}=0.$$

今设 β_1 的某行各元素的代数余子式分别为

$$C_0, C_1, \cdots, C_{m-1}, C_m, C_{m+1}, \cdots, C_{m+n-1}, C_{m+n};$$

β_2 与之相应那行各元素的代数余子式分别为

$$C'_0, C'_1, \cdots, C'_{m-1}, C'_m, C'_{m+1}, \cdots, C'_{m+n-1}, C_{m+n}.$$

注意其中最后一个代数余子式是一样的. 根据代数学中代数余子式的特性可知

$$C_0+C_1x+\cdots+C_{m-1}x^{m-1}+C_my+C_{m+1}xy+\cdots$$
$$+C_{m+n-1}x^{n-1}y+C_{m+n}x^m=0,$$
$$C'_0+C'_1x+\cdots+C'_{m-1}x^{m-1}+C'_my+C'_{m+1}xy+\cdots$$
$$+C'_{m+n-1}x^{n-1}y+C_{m+n}x^ny=0$$

均被点 $(x_j, y_j)(j=0, 1, \cdots, m+n)$ 所满足. 于上两式中消去 y, 则推得下述关于 x 的方程

$$C_{m+n}^2x^{m+n}+Q(x)=0,$$

其中 $Q(x)$ 为多项式类 H_{m+n-1} 中的某多项式. 上述 $m+n$ 次多项式有 $m+n+1$ 个零点 $x_j(j=0, 1, \cdots, m+n)$. 从而 $C_{m+n}=0$.

按同样办法, 可以指出 β_1 和 β_2 中最后一列各元素的代数余子式是 0. 从而对一切 $j(j=0, 1, \cdots, m+n)$ 而言, A_j 恒为奇异矩阵.

引理 1 设 $R(x)=p(x)/q(x)$ 是一个最简有理分式函数, 其中 $p(x)\in H_\mu$, $q(x)\in H_\omega$. t 为满足

$$\max(m+\omega, n+\mu)<t<m+n+1$$

的正整数. 若

$$R(x_{j\alpha})=f(x_{j\alpha}), \ \alpha=1, 2, \cdots, t;$$
$$R(x_{j\alpha})\neq f(x_{j\alpha}), \ \alpha=t+1, \cdots, m+n+1,$$

其中点列 $x_{j1}, x_{j2}, \cdots, x_{jm+n+1}$

是点列 $x_0, x_1, \cdots, x_{m+n}$ 的某种重新排列所得的点列. 则由前述方程组 (2·1) 的任一组非平凡解 $N_m^*(x)$, $D_n^*(x)$ 在约去一切公因子后所得的多项式偶 $A(x)$, $B(x)$ 必也满足

$$\frac{A(x_{j\alpha})}{B(x_{j\alpha})}\neq f(x_{j\alpha}), \ \alpha=t+1, \cdots, m+n+1. \qquad (2·5)$$

证明 由所设条件可知 $N_m^*(x)\cdot q(x)-D_m^*(x)\cdot p(x)$ 是次数低于 t, 但却具有 t 个零点 $x=x_{j\alpha}(\alpha=1, 2, \cdots, t)$ 的多项式. 因而

$$N_m^*(x)\cdot q(x)-D_n^*(x)\cdot p(x)\equiv 0.$$

设 $T(x)$ 是 $N_m^*(x)$ 与 $D_n^*(x)$ 的最大公因子. 则由

$$\begin{aligned} &N_m^*(x)\cdot q(x)-D_n^*(x)\cdot p(x)\\ &\quad\equiv T(x)\cdot\{A(x)\cdot q(x)-B(x)\cdot p(x)\}\equiv 0, \end{aligned}$$

可推出

$$A(x)\cdot q(x)-B(x)\cdot p(x)\equiv 0. \qquad (2·6)$$

若 (2·5) 式不满足. 则存在某个 α 值 $(t+1\leqslant\alpha\leqslant m+n+1)$, 使

$$\frac{A(x_{j\alpha})}{B(x_{j\alpha})}=f(x_{j\alpha}). \tag{2·7}$$

由此根据 $A(x)$, $B(x)$ 互质的假定, 必有

$$B(x_{j\alpha})\neq 0.$$

由(2·6)和(2·7)可知

$$p(x_{j\alpha})-q(x_{j\alpha})\cdot f(x_{j\alpha})=0.$$

因 $p(x)$, $q(x)$ 是互质的, 所以 $q(x_{j\alpha})\neq 0$. 从而由上式两边除以 $q(x_{j\alpha})$, 得到

$$\frac{p(x_{j\alpha})}{q(x_{j\alpha})}=f(x_{j\alpha}).$$

这和引理假设相矛盾. 证毕.

引理 2 若有一最简有理分式函数

$$R(x)=\frac{t_rx^r+\cdots+t_1x+t_0}{v_sx^s+\cdots+v_1x+v_0}=\frac{t(x)}{v(x)},$$

$0\leqslant r\leqslant m-1$, $0\leqslant s\leqslant n-1$, 使得

$$t(x_j)/v(x_j)=f(x_j),\quad j=0,\ 1,\ \cdots,\ m+n, \tag{2·8}$$

则 $\beta\equiv 0$.

证明 由假定(2·8)推出

$$\begin{aligned} t(x_j)-v(x_j)f(x_j) &=t_0+t_1x_j+\cdots+t_rx_j^r-v_0f(x_j)-v_1x_jf(x_j)-\cdots \\ &\quad -v_sx_j^sf(x_j)=0,\quad j=0,\ 1,\ \cdots,\ m+n. \end{aligned}$$

所以也有

$$x_jt(x_j)-x_jv(x_j)f(x_j)=0,\quad j=0,\ 1,\ \cdots,\ m+n.$$

利用这两个关系式, 可以对行列式 β 的列进行消元, 使有某两列的前 $m+n+1$ 行的元素全为 0. 因而行列式 β 最后一行 (第 $m+n+2$ 行) 各元素的代数余子式均为 0. 即 $\beta\equiv 0$.

引理 3 若 $\beta=a(x)-b(x)y$ 可分解因式为

$$\beta=P(x)[A(x)-B(x)y],$$

其中 $A(x)-B(x)y$ 是不可约的，且

$$P(x)\ 次数=p\leqslant\min(m,\ n),$$

则不存在最简有理分式

$$\frac{t(x)}{v(x)},\quad t(x)\in H_m,\quad v(x)\in H_n,$$

满足 $$\frac{t(x_j)}{v(x_j)}=f(x_j),\quad j=0,\ 1,\ \cdots,\ m+n.$$

证明 因为 $\beta\neq0$，所以根据引理 2，有点集 $\{(x_j,\ y_j)\}_{j=0}^{m+n}$ 的某子集 $(x_{jr},\ y_{jr})\ (r=1,\ \cdots,\ t)$，使得

$$\frac{A(x_{jr})}{B(x_{jr})}\neq f(x_{jr}),\quad r=1,\ \cdots,\ t.$$

由此可知

$$A(x_{jr})-B(x_{jr})f(x_{jr})\neq0,\quad r=1,\ \cdots,\ t. \qquad (2\cdot9)$$

事实上，若(2·9)式不成立，则必有某 $r_0(1\leqslant r_0\leqslant t)$ 存在，使

$$A(x_{jr_0})-B(x_{jr_0})f(x_{jr_0})=0. \qquad (2\cdot10)$$

则当 $B(x_{jr_0})=0$ 时，必有 $A(x_{jr_0})=0$，此与 $A(x)$，$B(x)$ 不可约的假设矛盾；而当 $B(x_{jr})\neq0$ 时，由(2·10)式必有

$$\frac{A(x_{jr})}{B(x_{jr})}=f(x_{jr}),$$

这也同假设前提相矛盾. 从而(2·9)式成立. 由于

$$\beta=\beta(x_{jr},\ y_{jr}),\quad r=1,\ \cdots,\ m+n+1,$$

于是由(2·9)式必有 $P(x_{jr})=0$，$r=1,\ \cdots,\ t$，且 $p\geqslant t$.

现在 $A(x)$ 的次数 $\leqslant m-p$，$B(x)$ 的次数 $\leqslant n-p$，且

$$\frac{A(x_{jr})}{B(x_{jr})}=f(x_{jr}),\quad r=t+1,\ \cdots,\ m+n+1.$$

而 $$\max(m-p+n,\ n-p+m)$$
$$=m+n-p<m+n+1-t<m+n+1,$$

于是由引理 1 和定理 2 可知，不存在满足插值条件(1·4)的最简有理分式．从而引理 3 得证．

引理 4 设 $\beta=m(x)-n(x)y$．又设 $M(x)/N(x)$ 是由 $m(x)/n(x)$ 消去一切公共因子所导出的有理分式函数．如果对某个 r $(1\leqslant r\leqslant m+n+1)$，有

$$\frac{M(x_{jr})}{N(x_{jr})}\neq f(x_{jr}),$$

则 $(x-x_{jr})$ 必为 $n(x)$ 的一个因子．

证明 假若对于某个 x_{jr}，有

$$\frac{M(x_{jr})}{N(x_{jr})}\neq f(x_{jr}),\quad 且\quad n(x_{jr})\neq 0.$$

如果 $r_1, r_2, \cdots, r_\omega$ 是 $m(x)$ 和 $n(x)$ 的公共零点，于是，因为 $n(x_{jr})\neq 0$，有

$$\begin{aligned}f(x_{jr})&=\frac{m(x_{jr})}{n(x_{jr})}=\frac{(x_{jr}-r_1)\cdots(x_{jr}-r_\omega)M(x_{jr})}{(x_{jr}-r_1)\cdots(x_{jr}-r_\omega)N(x_{jr})}\\&=\frac{M(x_{jr})}{N(x_{jr})}.\end{aligned}$$

此与假设矛盾．引理 4 得证．

定理 3 设 (x_j, y_j) $(j=0, 1, \cdots, m+n+1)$ 中的各 x_j $(j=0, 1, \cdots, m+n+1)$ 是互异的．则为使存在满足插值条件(1·4)的最简有理分式

$$R(x)=\frac{p(x)}{q(x)},\ p(x)\in H_m,\ q(x)\in H_n,$$

必须且只须各个矩阵 A_j $(j=0, 1, \cdots, m+n+1)$ 是非奇异的．

证明 假若有某个 i $(0\leqslant i\leqslant m+n)$ 存在，使 A_i 是奇异的，即 $\mathscr{D}(A_i)=0$．今对 β 那个行列式作列消元，变其为

$$\beta=\begin{vmatrix} 1 & x_0-x & x_0(x_0-x) & \cdots & x_0^{m-1}(x_0-x) & y_0 & y_0(x_0-x) & x_0y_0(x_0-x) & \cdots & x_0^{n-1}y_0(x_0-x) \\ 1 & x_1-x & x_1(x_1-x) & \cdots & x_1^{m-1}(x_1-x) & y_1 & y_1(x_1-x) & x_1y_1(x_1-x) & \cdots & x_1^{n-1}y_1(x_1-x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{m+n}-x & x_{m+n}(x_{m+n}-x) & \cdots & x_{m+n}^{m-1}(x_{m+n}-x) & y_{m+n} & y_{m+n}(x_{m+n}-x) & x_{m+n}y_{m+n}(x_{m+n}-x) & \cdots & x_{m+n}^{n-1}y_{m+n}(x_{m+n}-x) \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & y & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

再将β按最后一行展开，则可得

$$\beta=m(x)-n(x)\cdot y,$$

其中 $m(x)$, $n(x)$ 分别为 x 的两个 $m+n$ 次多项式. 注意到 A_i 的定义和行列式的运算法则，还可知

$$n(x)=\sum_{i=0}^{m+n}\left\{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{m+n}(x_j-x)\cdot\mathscr{D}(A_i)\right\},$$

而且它显然可被 $(x-x_i)$ 所整除. 于是根据引理 3, 不存在满足插值条件(1·4)的最简有理分式函数

$$\frac{t(x)}{v(x)},\ t(x)\in H_m,\ v(x)\in H_n.$$

反之，如果各 A_i 非奇异 $(i=0, 1, \cdots, m+n)$, 即 $\mathscr{D}(A_i)\neq 0(i=0, 1, \cdots, m+n)$，因为 $x-x_i$ 可以整除

$$n(x)=\sum_{i=0}^{m+n}\left\{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{m+n}(x_j-x)\cdot\mathscr{D}(A_i)\right\}$$

中除去 $\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{m+n}(x_j-x)\cdot\mathscr{D}(A_i)$ 之外的一切项，所以 $(x-x_i)$ 除不尽 $n(x)$. 于是根据引理 4, 将 $m(x)$ 与 $n(x)$ 约去一切公因子后所得的多项式 $M(x)$ 与 $N(x)$ 必满足插值条件

$$\frac{M(x_i)}{N(x_i)}=f(x_i),\ i=0, 1, \cdots, m+n.$$

定理 3 证完.

例 给定 $(x_0, y_0)=(0, 1)$, $(x_1, y_1)=(1, 0)$ 和 $(x_2, y_2)=(2, 0)$, 考虑用形如

$$R(x)=\frac{a_0+a_1x}{b_0+b_1x}$$

的有理函数来插值上述三个型值的问题. 由于

$$A_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

是一个奇异矩阵，因而根据定理 3，插值问题的解不存在.

在以上讨论中，恒假定了 β 不恒为 0. 当 β 恒等于 0 时，则至少存在某个 $i(0\leqslant i\leqslant m+n)$，使 A_i 是奇异的. 针对这种情况定理 3 有下述推广.

定理 4 若对于 $i=0, 1, \cdots, m+n$，A_i 的秩数是一常数，则存在满足插值条件(1·4)的有理函数

$$y(x)=p(x)/q(x).$$

证明 假若不存在这样的有理函数 $y(x)$. 由引理 4，对于方程组

$$a(x_i)-b(x_i)y_i=0,\quad i=0, 1, \cdots, m+n$$

的任意一组解 $a(x)$，$b(x)$ 来说，必至少有某个 i 存在，使 $(x-x_i)$ 可以整除 $b(x)$，亦即 $b(x_i)=0$. 从而由上式可知 $a(x_i)=0$，亦即 $(x-x_i)$ 还可以整除 $a(x)$. 故有某个正整数 t 存在，使

$$a(x)-b(x)y=(x-x_i)^t[a^*(x)-b^*(x)y],$$

其中 $a^*(x_i)-b^*(x_i)y_i\neq 0$，但

$$a^*(x_j)-b^*(x_j)y_j=0,\quad j=0, 1, \cdots, m+n, j\neq i. \tag{2·11}$$

现在设

$$a^*(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\cdots+\alpha_{m-t}x^{n-t},$$

$$b^*(x)=\beta_0+\beta_1x+\cdots+\beta_{n-t}x^{n-t}.$$

则方程组(2·11)的系数矩阵是一个 $(m+n)\times(m+n-2t+2)$ 矩阵 $(t\geqslant 1)$. 因此它的秩数不高于 $m+n-2t+2$. 因为 A_i 恰好是 (2·11) 的系数矩阵再增加 $t-1$ 列所得的矩阵，因而 A_i 的秩数不高于 $m+n-2t+2+(t-1)=m+n-t+1$. 而且由于对某 $i(0\leqslant i\leqslant m+n)$ 来说，$a^*(x_i)-b^*(x_i)y_i\neq 0$，方程组

$$a^*(x_r)-b^*(x_r)y_r=0,\quad r=0, 1, \cdots, m+n; r\neq j, j\neq i \tag{2·12}$$

的系数矩阵的秩数必然等于 $m+n-2t+2$. 但 $A_j(j\neq i)$ 恰好

是(2·12)的系数矩阵增加上面所说的 $t-1$ 列后所得的矩阵，因此 A_j 的秩数大于 A_i 的秩数（$j\neq i$），这与假设矛盾. 从而定理 4 得证.

在结束本节时，我们来介绍一下 L. Wuytack[81] 中一个有趣的结果. L. Wuytack 引进了 $f(x)$ 的 (m, n) 插值有理分式的概念：设 $r(x)=p(x)/q(x)$ 是方程组 (2·1) 的解，且 $p'(x)/q'(x)$ 是 $p(x)/q(x)$ 的最简有理分式. 如果 $q'(x)=\sum_{i=0}^{n} b'_i x^i$ 满足条件：

$$b'_i=0,\ i=0,\ 1,\ \cdots,\ k-1;\ b'_k\neq 0,$$

则将 $p'(x)/q'(x)$ 标准化为 $b'_k=1$（即分子分母各除以 b'_k 所得者）. 并称这样的有理分式函数

$$r_{m,n}(x)=p'(x)/q'(x)$$

为 $f(x)$ 的 (m, n) 插值有理分式.

L. Wuytack 证明了如下的定理.

定理 5([81]) 设 $r_{m,n}(x)=p'(x)/q'(x)$ 是 $f(x)$ 的 (m,n) 插值有理分式. 则存在 $\{x_{i_1},\ \cdots,\ x_{i_N}\}\subset\{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_{m+n}\}$，$0\leqslant N\leqslant\min(m-m',\ n-n')$，其中 m', n' 分别为 $p'(x)$, $q'(x)$ 的实际次数，使得

$$p(x)=(x-x_{i_1})\cdots(x-x_{i_N})\,p'(x),$$
$$q(x)=(x-x_{i_1})\cdots(x-x_{i_N})\,q'(x)$$

是(2·1)的解.

证明 设 $R_1(x)=p_1(x)/q_1(x)$ 是方程组(2·1)的一个解，即

$$p_1(x_i)-f(x_i)\cdot q_1(x_i)=0,\ \ i=0,\ 1,\ \cdots,\ m+n. \tag{2·13}$$

设 $\{x_{i_1},\ \cdots,\ x_{i_N}\}$ 是 $\{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_{m+n}\}$ 中使 $q_1(x_{i_s})=0\ (s=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ 者. 由 (2·13) 式可知

$$p_1(x_{i_s})=0,\ s=1,\ 2,\ \cdots,\ N.$$

今取 $$t(x)=(x-x_{i_1})\cdots(x-x_{i_N}),$$

$$J=\{0,\ 1,\ \cdots,\ m+n\}\sim\{i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_N\}.$$

因为 $p'(x)/q'(x)$ 是 $p_1(x)/q_1(x)$ 的最简有理分式，所以对每个 $j\in J$，必有

$$q'(x_j)\neq 0.$$

于是存在多项式 $v(x)$，使

$$p_1(x)=v(x)t(x)p'(x),\ q_1(x)=v(x)t(x)q'(x). \tag{2·14}$$

由上式，显然 $t(x)\in H_{m-m'}$，$t(x)\in H_{n-n'}$. 故

$$0\leqslant N\leqslant\min(m-m',\ n-n').$$

由(2·13)和(2·14)可知当 $j\in J$ 时，有

$$p'(x_j)=f(x_j)q'(x_j). \tag{2·15}$$

只须令 $p(x)=t(x)\cdot p'(x)$，$q(x)=t(x)\cdot q'(x)$，则由(2·15)可得

$$p(x_i)-f(x_i)q(x_i)=0,\ i=0,\ 1,\ \cdots,\ m+n.$$

定理 5 证完.

§3 切触有理插值*

为叙述方便起见，今把由(1·3)式所给出的有理分式函数 $R_{m,n}(x)$ 作成的类记为 $R(m,\ n)$（其中 $N_m(x)$，$D_n(x)$ 互质）.

设 $$x_0<x_1<\cdots<x_j.$$

所谓切触有理插值问题，就是寻求有理分式

$$p(x)/q(x)\ \in R(m,\ n),$$

使得 $$\left(\frac{d}{dx}\right)^k\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)_{x=x_i}=f_i^{(k)},$$

$$k=0,\ 1,\ \cdots,\ s_i-1;\ i=0,\ 1,\ \cdots,\ j; \tag{3·1}$$

* 可参见参考文献[80]、[66].

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)_{x=x_{j+1}}=f_{j+1}^{(k)},\ k=0,1,\cdots,t-1,$$

其中 $$m+n=\sum_{i=0}^{j}s_i+t-1,\ 1\leqslant t\leqslant s_{j+1}.$$

同插值问题(3·1)相关联的,我们还考虑:寻求$p(x)\in H_m$, $q(x)\in H_n$,使

$$p^{(k)}(x_i)=(f(x)\cdot q(x))^{(k)}(x_i),$$
$$k=0,1,\cdots,s_i-1;\ i=0,1,\cdots,j; \tag{3·2}$$
$$p^{(k)}(x_{j+1})=(f(x)\cdot q(x))^{(k)}(x_{j+1}),\ k=0,1,\cdots,t-1.$$

设 $p(x)=\sum_{i=0}^{m}a_i\cdot x^i$, $q(x)=\sum_{i=0}^{n}b_i\cdot x^i$, 则 (3·2) 是一个由 $m+n+1$ 个方程组成的、含有 $m+n+2$ 个未知数的齐次线性方程组. 因而(3·2)必至少含有一组非平凡解.

若 $p_1(x)$、$q_1(x)$ 和 $p_2(x)$、$q_2(x)$ 是 (3·2) 的两组不同的解. 则和定理1类似地,不难证明由它们所确定的两个有理分式

$$R_1(x)=p_1(x)/q_1(x),\ R_2(x)=p_2(x)/q_2(x)$$

是等价的. 亦即

$$p_1(x)\cdot q_2(x)\equiv p_2(x)\cdot q_1(x).$$

设 $p(x)$, $q(x)$ 是 (3·2) 的一组解. 因为有理分式 $R(x)=p(x)/q(x)$ 可能是可约的,因此 $R(x)=p(x)/q(x)$ 并不一定属于 $R(m,n)$. 若 $R(x)=p(x)/q(x)=p_0(x)/q_0(x)$, 而 $p_0(x)/q_0(x)$ 已是不可约的. 如果 $q_0(x)=\sum_{i=0}^{n}d_ix^i$, 其中 $d_j\neq 0$, 而 $d_0=d_1=\cdots=d_{j-1}=0$. 则我们便将 $p_0(x)/q_0(x)$ 标准化为使 $d_j=1$. 这样得到的 $R_{m,n}(x)=p_0(x)/q_0(x)$ 属于 $R(m,n)$, 且对一切的 x 值均有 $q_0(x)\neq 0$. L. Wuytack 于 [80] 中称这样的 $R_{m,n}(x)=p_0(x)/q_0(x)$ 为 (m,n) 切触于 $f(x)$. $p_0(x)$和

$q_0(x)$ 的实际次数分别记为 m' 和 n'.

因为方程组(3·2)的任何两个有理分式解都是等价的，从而它们当然有同一个不可约形式. 所以根据 (m, n) 切触于 $f(x)$ 的定义，自然有

引理 5 (m, n) 切触于 $f(x)$ 的有理分式函数是唯一存在的.

今举例说明：$f(x)$ 的 (m, n) 切触有理分式

$$R_{m,n}(x)=p_0(x)/q_0(x)$$

并不总是满足方程组(3·2)的.

例 设 $x_0=0$, $x_1=1$, $s_0=2$, $s_1=1$ 且

$$f_0^{(0)}=f_0^{(1)}=f_1^{(0)}=1.$$

今考虑问题：寻求 $p(x)$, $q(x)\in H_1$, 使之满足方程组 (3·2), 或

$$\begin{aligned}
p(x_0)&=f_0^{(0)}\cdot q(x_0),\\
p'(x_0)&=f_0^{(1)}\cdot q(x_0)+f_0^{(0)}\cdot q'(x_0),\\
p(x_1)&=f_1^{(0)}\cdot q(x_1).
\end{aligned}$$

显然，由 $\qquad p(x)=q(x)=x, \quad$ 对一切 x

所定义的 $p(x)$ 和 $q(x)$ 就满足上述方程组. 将其约化为

$$p_0(x)=q_0(x)=1,$$

于是 $(1, 1)$ 切触于 $f(x)$ 的有理分式为

$$R_{1,1}(x)=p_0(x)/q_0(x)=1.$$

显然它们并不组成上述方程组的一组解.

为叙述方便起见，按下列方式定义一个新的点列 y_0, y_1, $\cdots$:

$$\begin{aligned}
&y_i=x_0, &&\text{当 } i=0,\ 1,\ \cdots,\ s_0-1,\\
&y_{s+i}=x_j, &&\text{当 } i=0,\ 1,\ \cdots,\ s_j-1,
\end{aligned} \tag{A}$$

其中 $s=\sum_{k=0}^{j-1}s_k\,(j\geqslant 1)$.

同§2中定理5完全类似地，我们有

引理6 若 $R_{m,n}(x)=p_0(x)/q_0(x)(m, n)$ 切触于 $f(x)$，则存在 $\{y_0, y_1, \cdots, y_{m+n}\}$ 中的 N 个点 $\{z_1, z_2, \cdots, z_N\}$ $0\leqslant N\leqslant \min(m-m', n-n')$，使

$$p(x)=(x-z_1)\cdots(x-z_N)\cdot p_0(x),$$
$$q(x)=(x-z_1)\cdots(x-z_N)\cdot q_0(x)$$

满足方程组(3·2).

引理6的证明是和上节定理5的证明过程相类似的. 此处从略.

为了说明引理6的应用，我们回到例3. 而取 $N=1$，$z_1=x_0$. 因为

$$R_{1,1}(x)=p_0(x)/q_0(x),\ p_0(x)\equiv q_0(x)\equiv 1,$$

自然 $m'=n'=0$, $\min(m-m', n-n')=1$. 虽然多项式 $p_0(x)\equiv 1$ 和 $q_0(x)\equiv 1$ 不满足方程组(3·2)，但是

$$p(x)=(x-x_0)\cdot p_0(x),\ q(x)=(x-x_0)\cdot q_0(x)$$

却是方程组(3·2)的解.

下面的定理6指出了方程组(3·1)和方程组(3·2)之间的关系，它是由 H. E. Salzer 在文[66]中给出的.

定理6([66]) 若 $q(x_i)\neq 0$，则方程组

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k\left[\frac{p(x)}{q(x)}\right]_{x=x_i}=f^{(k)}(x_i),\ k=0, 1, \cdots, s_i-1 \quad (3\cdot 3)$$

等价于方程组

$$p^{(k)}(x_i)=(f(x)\cdot q(x))^{(k)}(x_i),\ k=0, 1, \cdots, s_i-1. \quad (3\cdot 4)$$

证明 采用数学归纳法来证明.

当 $k=0$ 时，由于 $q(x_i)\neq 0$，所以自然(3·3)和(3·4)是互相等价的.

当 $k=1$ 时，于 x_i 处一阶切触插值为

$$p(x_i)/q(x_i)=f(x_i),\ \left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)'_{x=x_i}=f'(x_i).$$

因 $q(x_i)\neq 0$，故它们又可表示为

$$p(x_i)=f(x_i)\cdot q(x_i),$$
$$\frac{p'(x_i)}{q(x_i)}-\frac{p(x_i)q'(x_i)}{q(x_i)^2}=f'(x_i). \tag{3·5}$$

以(3·5)的第一式代入第二式，两边再乘以 $q(x_i)$，可知(3·5)式等价于

$$p(x_i)=f(x_i)\cdot q(x_i),$$
$$p'(x_i)=(f(x)q(x))'_{x=x_i}.$$

它说明此时(3·3)和(3·4)是互相等价的.

同样，当 $k=2$ 时，2 阶切触插值

$$(p(x)/q(x))_{x=x_i}=f(x_i),\ (p(x)/q(x))'_{x=x_i}=f'(x_i),$$
$$(p(x)/q(x))''_{x=x_i}=f''(x_i)$$

也可以通过类似的办法化为

$$p(x_i)=(f(x)q(x))_{x=x_i},\ p'(x_i)=(f(x)\cdot q(x))'_{x=x_i},$$
$$p''(x_i)=(f(x)\cdot q(x))''_{x=x_i}.$$

今假定对 0 阶，1 阶，一直到 $r-1$ 阶切触插值，定理均成立. 即在 $q(x_i)\neq 0$ 假定下，有

$$(p(x)/q(x))^{(m)}_{x=x_i}=f^{(m)}(x_i),\ \ m=0,\ 1,\ \cdots,\ r-1 \tag{3·6}$$

等价于

$$p^{(m)}(x_i)=(f(x)\cdot q(x))^{(m)}_{x=x_i},\ \ m=0,\ 1,\ \cdots,\ r-1 \tag{3·7}$$

的事实成立，再证当 $q(x_i)\neq 0$ 时，

$$(p(x)/q(x))^{(m)}_{x=x_i}=f^{(m)}(x_i),\ \ m=0,\ 1,\ \cdots,\ r \tag{3·8}$$

与

$$p^{(m)}(x_i)=(f(x)\cdot q(x))^{(m)}_{x=x_i},\ \ m=0,\ 1,\ \cdots,\ r \tag{3·9}$$

相互等价.

先设(3·9)成立. 考察其中 $m=r$ 的项

$$p^{(r)}(x_i)=(f(x)\cdot q(x))^{(r)}_{x=x_i}. \qquad (3\cdot 10)$$

把(3·10)中等号左边的项化为

$$p^{(r)}(x_i)=\left[\frac{p(x)}{q(x)}\cdot q(x)\right]^{(r)}_{x=x_i},$$

然后分别对它和(3·10)的右端应用求乘积高阶导数的Leibnitz 公式，可得

$$\sum_{m=0}^{r}\binom{r}{m}\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)^{(m)}_{x=x_i}\cdot[q(x)]^{(r-m)}_{x=x_i}$$

$$=\sum_{m=0}^{r}\binom{r}{m}f^{(m)}(x_i)\cdot[q(x)]^{(r-m)}_{x=x_i}. \qquad (3\cdot 11)$$

因为(3·6)和(3·7)等价，所以当$m=0, 1, \cdots, r-1$时，(3·11)两端各项完全相同，因而相互抵消. 从而应有

$$\left[\frac{p(x)}{q(x)}\right]^{(r)}_{x=x_i}=f^{(r)}(x_i).$$

它和(3·6)一起说明(3·8)式成立.

反之，设(3·8)式成立. 按Leibnitz 公式和(3·8)成立的假设，有

$$p^{(r)}(x_i)=\left[\frac{p(x)}{q(x)}\cdot q(x)\right]^{(r)}_{x=x_i}=\sum_{m=0}^{r}\binom{r}{m}\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)^{(m)}_{x=x_i}\cdot q^{(r-m)}(x_i)$$

$$=\sum_{m=0}^{r}\binom{r}{m}f^{(m)}(x_i)\cdot q^{(r-m)}(x_i)=(f(x)\cdot q(x))^{(r)}_{x=x_i}.$$

从而(3·9)式成立. 定理证完.

定理 6 的作用在于把非线性插值问题 (3·3) 转化为一个等价的线性问题的求解问题. 从而使问题得以大大地简化.

定理 7 为使满足(3·1)的有理分式函数 $R(x)\in R(m,n)$ 存在，必须且只须 (m, n) 切触于$f(x)$的有理分式函数满足(3·2).

证明 设 $R(x)=p(x)/q(x)$ 是 (3·1) 的一个解，则 $q(x_i)\neq 0\ (i=0,1,\cdots,j+1)$. 由定理 6 可知 (3·2) 也成立. 若 $R(x)\in R(m,n)$, 则 $p(x)/q(x)$ 是不可约的. 由引理 5, $R_{m,n}(x)$ 是唯一存在的，从而必有

$$R_{m,n}(x)=p(x)/q(x).$$

所以 (m,n) 切触有理分式满足 (3·2).

反之，假定 $R_{m,n}(x)=p_0(x)/q_0(x)$ 是 $f(x)$ 的 (m,n) 切触有理分式函数，则由 $p_0(x)/q_0(x)$ 的不可约性可知 $q_0(x_i)\neq 0\ (i=0,1,\cdots,j+1)$. 若 $R_{m,n}(x)$ 满足 (3·2), 则由定理 6 可知 $p_0(x)/q_0(x)$ 是 (3·1) 的解，此即存在 $R(x)\in R(m,n)$ 满足 (3·1) 式. 定理 7 证完.

从以上定理 7 的证明中不难发现，$R(m,n)$ 中每个满足 (3·1) 的有理分式 $R(x)$ 必然等于 $f(x)$ 的 (m,n) 切触有理分式 $R_{m,n}(x)$. 于是由引理 5 和定理 7 可知有

定理 8 若切触有理插值问题 (3·1) 于 $R(m,n)$ 中有一解，则此解必唯一且等于 $f(x)$ 的 (m,n) 切触有理分式 $R_{m,n}(x)$.

以下我们将利用上述切触有理插值的一般理论来研究具体的切触连分式.

对于不同的 m 和 n, $f(x)$ 的 (m,n) 切触有理分式可列表如下：

表 3·1 $f(x)$ 的 (m,n) 切触有理分式表

$R_{0,0}(x)$,	$R_{0,1}(x)$,	$R_{0,2}(x)$,	$R_{0,3}(x)$,	$\cdots$
$R_{1,0}(x)$,	$R_{1,1}(x)$,	$R_{1,2}(x)$,	$R_{1,3}(x)$,	$\cdots$
$R_{2,0}(x)$,	$R_{2,1}(x)$,	$R_{2,2}(x)$,	$R_{2,3}(x)$,	$\cdots$
$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots$

假定表 3·1 中的每一个元素是相应的切触有理插值问题(3·1)

的解.

今考虑下列形式的连分式

$$C_0+C_1(x-y_0)+\cdots+C_k(x-y_0)\cdots(x-y_{k-1})$$
$$+\frac{C_{k+1}(x-y_0)\cdots(x-y_k)}{1}+\frac{C_{k+2}(x-y_{k+1})}{1}$$
$$+\frac{C_{k+3}(x-y_{k+2})}{1}+\cdots, \tag{3·12}$$

其中各 $y_i(i\geqslant 0)$ 由 (A) 式所定义. 设 T_k 是位于表 3·1 的一个梯子上的元素的集合, 即

$$T_k=\{R_{k,0}(x),\ R_{k+1,0}(x),\ R_{k+1,1}(x),\ R_{k+2,1}(x),\ \cdots\},\quad k\geqslant 0. \tag{3·13}$$

为了给出一种确定 (3·12) 中系数 $C_i(i\geqslant 0)$ 的方法, 下面先给出表 3·1 中某些元素之间的关系.

引理 7 设

$$v(x)=(x-y_0)(x-y_1)\cdots(x-y_{m+n}),$$
$$R_{m,n}(x)=p_1(x)/q_1(x),\ R_{m+\mu,n+\nu}(x)=p_2(x)/q_2(x),$$

其中 $\mu,\ \nu\geqslant 0$. 则存在一个次数 $\leqslant\max(\mu-1,\ \nu-1)$ 的多项式 $w(x)$, 使得

$$p_1(x)\cdot q_2(x)-p_2(x)\cdot q_1(x)=v(x)\cdot w(x). \tag{3·14}$$

证明 设 j 和 t 满足

$$m+n=\sum_{i=0}^{j}s_i+t-1,\ 1\leqslant t\leqslant s_{j+1}.$$

按假定 $R_{m,n}(x)$ 和 $R_{m+\mu,n+\nu}(x)$ 是 (3·1) 的解, 于是由定理 5 可知 $p_1(x)/q_1(x)$ 和 $p_2(x)/q_2(x)$ 是 (3·2) 的解. 由关系式

$$p_1(x)\cdot q_2(x)-p_2(x)\cdot q_1(x)$$
$$=[p_1(x)-f(x)\cdot q_1(x)]\cdot q_2(x)$$
$$-[p_2(x)-f(x)\cdot q_2(x)]\cdot q_1(x)$$

立即推得

$$[p_1(x)\cdot q_2(x)-p_2(x)\cdot q_1(x)]^{(k)}_{x=x_i}=0,$$
$$k=0,1,\cdots,s_i-1;\ i=0,1,\cdots,j,$$
$$[p_1(x)\cdot q_2(x)-p_2(x)\cdot q_1(x)]^{(k)}_{x=x_{j+1}}=0,$$
$$k=0,1,\cdots,t-1.$$

因此存在一多项式 $w(x)$，使得

$$p_1(x)\cdot q_2(x)-p_2(x)\cdot q_1(x)=v(x)\cdot w(x).$$

因为 $p_1(x)\cdot q_2(x)-p_2(x)\cdot q_1(x)$ 的次数最多为 $m+n+\max(\mu,\nu)$，从而 $w(x)$ 的次数不超过 $\max(\mu-1,\nu-1)$. 引理证完.

定理 9 若 T_k 中的元素是互异的，则存在形如(3·12)的连分式，其 $C_{k+i}\neq 0\ (i\geqslant 1)$，而它们的渐近分式是 T_k 中的元素.

证明 设

$$R_{k+i,j}(x)=p_{i+j}(x)/q_{i+j}(x),\ i=j,\ j+1;\ j=0,1,2,\cdots.$$

我们构造一个如下的连分式

$$\beta_0+\frac{\alpha_1}{\beta_1}+\frac{\alpha_2}{\beta_2}+\frac{\alpha_3}{\beta_3}+\cdots, \tag{3·15}$$

使其第 n 渐近分式等于 $p_n(x)/q_n(x)\ (n\geqslant 0)$. 这意味着 β_0 和 $\alpha_i,\ \beta_i(i>0)$ 必须满足关系式

$$\left.\begin{array}{l}\beta_0=p_0,\ \beta_0\cdot\beta_1+\alpha_1=p_1,\ \beta_1=q_1,\\ \left.\begin{array}{l}\beta_n\cdot p_{n-1}+\alpha_n\cdot p_{n-2}=p_n,\\ \beta_n\cdot q_{n-1}+\alpha_n\cdot q_{n-2}=q_n,\end{array}\right\} n\geqslant 2.\end{array}\right\} \tag{3·16}$$

因此 $\beta_0=p_0,\ \beta_1=1,\ \alpha_1=p_1-p_0.$

由这些方程以及 p_0, p_1 的定义可推出必存在一组系数 $C_0, C_1, \cdots, C_{k+1}$，使得

$$\beta_0=C_0+C_1(x-y_0)+\cdots+C_k(x-y_0)\cdots(x-y_{k-1}),$$
$$\alpha_1=C_{k+1}(x-y_0)\cdots(x-y_k).$$

因为$R_{k,0}(x)\neq R_{k+1,0}(x)$，可得$p_1(x)\neq p_0(x)$. 从而$C_{k+1}\neq 0$. 由(3·16)和引理7，存在非零常数$a_n$和$b_n$，使得

$$\alpha_n=a_n(x-y_{k+n-1}),\quad \beta_n=b_n,\quad n\geqslant 2.$$

采用连分式的等价变换，连分式(3·15)可以变为(3·12)型的连分式，且

$$C_{k+i}\neq 0,\quad i\geqslant 1.$$

定理9证完.

T_k中的元素($k\geqslant 0$)组成表3·1的一个下三角部分. 当然，如果我们取

$$\widetilde{T}_k=\{R_{0,k}(x), R_{0,k+1}(x), R_{1,k+1}(x), R_{1,k+2}(x), R_{2,k+2}(x),\cdots\},$$

则和定理9完全平行的定理也是成立的. 这时，$\widetilde{T}_k$恰好为表3·1的一个上三角部分. 有关的一些细节问题，此处不拟详述了.

§4 有理函数插值算法

在前面三节中，我们已经讨论了借助于有理分式函数作插值(包括切触型插值)时的存在唯一性定理.

因为有理函数插值一般将导致非线性方程组的求解问题，所以我们还讨论了在一定条件下把这些非线性问题约化为线性问题的等价转换.

本节中，给出了具体计算有理函数插值的算法. 包括Stoer算法，Thiele倒差商算法，Salzer算法和Wuytack算法等.

由于篇幅所限，不可能很详细地来介绍这些算法. 有兴趣的读者，可以参照有关部分引用的文献去作进一步的了解.

4-1 Stoer 算法

J. Stoer 在[72]中给出了一种计算有理函数插值的算法. 此处我们只是不加证明地引用这种算法. 为此需稍许改变前面的若干记号. 假定有理函数插值问题有解存在. 定义

$$R^s_{\mu,\nu}(x)=\frac{N^s_{\mu,\nu}(x)}{D^s_{\mu,\nu}(x)}=\frac{a^s_{\mu,\nu}x^\mu+\cdots+a^s_{0,\nu}}{b^s_{\mu,\nu}x^\nu+\cdots+b^s_{\mu,0}} \tag{4·1}$$

为满足插值条件

$$R^s_{\mu,\nu}(x_k)=f(x_k),\ k=s,\ s+1,\ \cdots,\ s+\mu+\nu \tag{4·2}$$

的有理函数, 并定义

$$d_s=x-x_s. \tag{4·3}$$

Stoer 的递推公式如下:

$$N^s_{0,0}(x)\equiv f(x_s)D^s_{0,0}(x)\equiv 1, \tag{4·4}$$

$$N^s_{\mu,\nu}(x)=d_sb^s_{\mu-1,\nu}N^{s+1}_{\mu-1,\nu}(x)-d_{s+\mu+\nu}b^{s+1}_{\mu-1,\nu}N^s_{\mu-1,\nu}(x), \tag{4·5}$$

$$\left.\begin{aligned}D^s_{\mu,\nu}(x)&=d_sb^s_{\mu-1,\nu}D^{s+1}_{\mu-1,\nu}(x)-d_{s+\mu+\nu}b^{s+1}_{\mu-1,\nu}N^s_{\mu-1,\nu}(x),\\ N^s_{\mu,\nu}(x)&=d_sa^s_{\mu,\nu-1}N^{s+1}_{\mu,\nu-1}(x)-d_{s+\mu+\nu}a^{s+1}_{\mu,\nu-1}N^s_{\mu,\nu-1}(x),\\ D^s_{\mu,\nu}(x)&=d_sa^s_{\mu,\nu-1}D^{s+1}_{\mu,\nu-1}(x)-d_{s+\mu+\nu}a^{s+1}_{\mu,\nu-1}D^s_{\mu,\nu-1}(x).\end{aligned}\right\} \tag{4·6}$$

如果我们要求的仅是 $R_{m,n}(x)$ 在 $x=\alpha$ 处的值, 则可以修改上述计算, 而给出下列递推公式(其中 $d_s=\alpha-x_s$):

$$P^s_{0,0}(\alpha)=f(x_s), \tag{4·7}$$

$$R^s_{\mu,0}(\alpha)=\frac{d_sR^{s+1}_{\mu-1,0}(\alpha)-d_{s+\mu}R^s_{\mu-1,0}(x)}{d_s-d_{s+\mu}}, \tag{4·8}$$

$$R^s_{0,\nu}(\alpha)=\frac{d_s-d_{s+\nu}}{\dfrac{d_s}{R^{s+1}_{0,\nu-1}(\alpha)}-\dfrac{d_{s+\nu}}{R^s_{0,\nu-1}(x)}}, \tag{4·9}$$

$$\begin{aligned}R^s_{\mu,\nu}(\alpha)&=R^s_{\mu-1,\nu}(\alpha)\\&+\frac{d_s[R^{s+1}_{\mu-1,\nu}(\alpha)-R^s_{\mu-1,\nu}(\alpha)]\cdot[R^s_{\mu-1,\nu}(\alpha)-R^{s+1}_{\mu-1,\nu-1}(\alpha)]}{\left\{\begin{aligned}&d_s[R^s_{\mu-1,\nu}(\alpha)-R^{s+1}_{\mu-1,\nu-1}(\alpha)]\\&-d_{s+\mu+\nu}[R^{s+1}_{\mu-1,\nu}(\alpha)-R^{s+1}_{\mu-1,\nu-1}(\alpha)]\end{aligned}\right\}},\end{aligned} \tag{4·10}$$

$$R_{\mu,\nu}^{s}(\alpha)=R_{\mu,\nu-1}^{s}(\alpha)$$
$$+\frac{d_s[R_{\mu,\nu-1}^{s+1}(\alpha)-R_{\mu,\nu-1}^{s}(\alpha)][R_{\mu,\nu-1}^{s}(\alpha)-R_{\mu-1,\nu-1}^{s+1}(\alpha)]}{\left\{\begin{array}{c}d_s[R_{\mu,\nu-1}^{s}(\alpha)-R_{\mu-1,\nu-1}^{s+1}(\alpha)]\\-d_{s+\mu+\nu}[R_{\mu,\nu-1}^{s+1}(\alpha)-R_{\mu-1,\nu-1}^{s+1}(\alpha)]\end{array}\right\}}. \tag{4·11}$$

递推公式(4·4)、(4·5)、(4·6)是多项式插值算法中 Neville 迭代的一个相类似的结果.

以下用例子来说明这些公式的具体用法. 在表 4·1 中，我们给出了计算有理函数

$$R_{1,2}(x)\equiv R_{1,2}^{0}(x)$$

的一种格式. 该有理函数满足插值条件

$$R_{1,2}^{0}(1)=1,$$
$$R_{1,2}^{0}(2)=-1,$$
$$R_{1,2}^{0}(3)=2,$$
$$R_{1,2}^{0}(4)=2.$$

$R_{0,0}^{s}$ 是由(4·4)式所定义的；表的下一列 $R_{1,0}^{s}$ 是利用(4·5)式来计算的；再下一列 $R_{1,1}^{s}$ 是利用 (4·6) 式由 $R_{1,0}^{s}$ 得到的，而 $R_{1,2}^{s}$ 也是利用 (4·6) 式由 $R_{1,1}^{s}$ 得到的.

不难看出，递推公式 (4·5) 是用来把下标 μ 增加 1，而递推公式 (4·6) 则是用来把下标 ν 增加 1. 表 4·2 给出了计算 $R_{1,2}^{0}(x)$ 的另一种格式.

作为一个例子，我们计算了对数函数值 ln(0.54) 的有理逼近值 $R_{2,2}(0.54)$. 其中使用的数据为

$$x_1=0.5,\quad \ln x_1=-0.693147;$$
$$x_2=0.6,\quad \ln x_2=-0.510826;$$
$$x_3=0.4,\quad \ln x_3=-0.916291;$$
$$x_4=0.7,\quad \ln x_4=-0.356675;$$
$$x_5=0.8,\quad \ln x_5=-0.223144.$$

表4·1　说明计算 $R_{1,2}(x)\equiv R_{1,2}^0(x)$ 的例子

s	x_s	d_s	$f(x_s)$			
0	1	$x-1$	$R_{0,0}^0=1$			
1	2	$x-2$	$R_{0,0}^1=-1$	$R_{1,0}^0=-2x+3$		
2	3	$x-3$	$R_{0,0}^2=2$	$R_{1,0}^1=3x-7$	$R_{1,1}^0=\dfrac{-7x+13}{-5x+11}$	
3	4	$x-4$	$R_{0,0}^3=-2$	$R_{1,0}^2=-4x+14$	$R_{1,1}^1=\dfrac{-10x+28}{7x-22}$	$R_{1,2}^0=\dfrac{16x-36}{-11x^2+57x-66}$

表4·2　计算 $R_{1,2}^0(x)$ 的另一过程

s	x_s	d_s	$f(x_s)$			
0	1	$x-1$	$R_{0,0}^0=1$			
1	2	$x-2$	$R_{0,0}^1=-1$	$R_{0,1}^0=\dfrac{-1}{2x-3}$		
2	3	$x-3$	$R_{0,0}^2=2$	$R_{0,1}^1=\dfrac{-2}{-3x+8}$	$R_{0,2}^0=\dfrac{4}{7x^2-29x+26}$	
3	4	$x-4$	$R_{0,0}^3=-2$	$R_{0,1}^2=\dfrac{-2}{2x-7}$	$R_{0,2}^1=\dfrac{-4}{5x^2-31x+46}$	$R_{1,2}^0=\dfrac{16x-36}{-11x^2+57x-66}$

表4·3　用 Stoer 方法计算 $\ln 0.54$ 的结果($\ln 0.54=-0.616186$)

x_s	$\ln x_s$				
0.5	−0.694137				
0.6	−0.510826	$R_{1,0}^0=-0.620219$			
0.4	−0.916291	$R_{1,0}^1=-0.632465$	$R_{1,1}^0=-0.615984$		
0.7	−0.356675	$R_{1,0}^2=-0.655137$	$R_{1,1}^1=-0.616869$	$R_{2,1}^0=-0.616169$	
0.8	−0.223144	$R_{1,0}^3=-0.570324$	$R_{1,1}^2=-0.618727$	$R_{2,1}^1=-0.616274$	$R_{2,2}^0=-0.616185$

计算 $R_{2,2}(0.54)$ 的数值结果在表 4·3 中给出. 我们得到的近似值

$$R_{2,2}(0.54) = -0.616185$$

比多项式插值所能得到的近似值

$$R_{4,0}(0.54) = -0.616143$$

更接近真值 $\ln 0.54 = -0.616186$.

4-2 Thiele 倒差商算法

为了领会好 T. N. Thiele 倒差分算法，让我们先看看多项式插值的 Newton 差商算法. 根据通常多项式插值的熟知理论，对于任意给定的插值节点

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n,$$

则不管 $y_0, y_1, \cdots, y_n$ 如何给定，总存在唯一的 n 次多项式

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{\omega(x)}{(x-x_j)\omega'(x_j)}, \tag{4·12}$$

其中 $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$，满足插值条件

$$P_n(x_j) = y_j, \quad j = 0, 1, \cdots, n. \tag{4·13}$$

由 (4·12) 表示的插值多项式 $P_n(x)$ 称为 Lagrange 插值多项式. 这种表达形式对于用插值多项式进行理论分析来说是较方便的. 然而，当再增加节点，那怕是再增加一个节点时，Lagrange 插值多项式 $P_n(x)$（n 增大了）就得完全重新计算. 因此它对于造表或其它要随时增添节点的问题来说，就不甚适宜了. 多项式插值的 Newton 差商算法，恰好从这个角度弥补了这个不足.

Newton 差商算法，实际上就是一种待定系数的方法. 设

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots$$
$$+ a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}),$$

则其中系数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 可由插值条件 (4·13) 所逐一确定

为(记 $y_j=f(x_j)$, $j=0, 1, \cdots, n$)

$$
\begin{aligned}
&a_0=y_0=f(x_0),\\
&a_1=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=f(x_0, x_1),\\
&a_2=\frac{f(x_0, x_2)-f(x_0, x_1)}{x_2-x_1}=f(x_0, x_1, x_2), \qquad (4\cdot 14)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_j=\frac{f(x_0, \cdots, x_{j-2}, x_j)-f(x_0, \cdots, x_{j-2}, x_{j-1})}{x_j-x_{j-1}}\\
&\quad=f(x_0, \cdots, x_{j-1}, x_j),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_n=\frac{f(x_0, \cdots, x_{n-2}, x_n)-f(x_0, \cdots, x_{n-2}, x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}\\
&\quad=f(x_0, \cdots, x_{n-1}, x_n).
\end{aligned}
$$

于是又得到一个满足插值条件(4·13)的插值多项式

$$
\begin{aligned}
N_n(x)=&f(x_0)+f(x_0, x_1)(x-x_0)\\
&+f(x_0, x_1, x_2)(x-x_0)(x-x_1)+\cdots\\
&+f(x_0, x_1, \cdots, x_n)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}).
\end{aligned}
\qquad (4\cdot 15)
$$

这就是多项式插值理论中的 Newton 差商型公式. 而其中各系数

$$f(x_0), f(x_0, x_1), f(x_0, x_1, x_2), \cdots, f(x_0, x_1, \cdots, x_n)$$

分别称为 $y=f(x)$ 的 0 阶, 1 阶, 2 阶, $\cdots$, n 阶差商.

有关差商的各种有用性质此处就不列举了.

连分式插值的 Thiele 方法, 也是一种待定系数法. 它是为解决插值问题(1·3)、(1·4)而设计的.

连分式的原始形式为

$$R(x)=a_0+\frac{x-x_0}{a_1}+\frac{x-x_1}{a_2}+\cdots+\frac{x-x_{m+n-1}}{a_{m+n}}. \qquad (4\cdot 16)$$

按插值条件(1·4)，可逐一求出上述连分式的各个系数:

$$a_0=\varphi_0[x_0]=f(x_0),$$

$$a_k=\varphi_k[x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_{k-1},\ x_k]$$

$$=\frac{x_k-x_{k-1}}{\varphi_{k-1}[x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_{k-2},\ x_k]-\varphi_{k-1}[x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_{k-2},\ x_{k-1}]},$$

$$k=1,\ 2,\ \cdots,\ m+n. \qquad (4\cdot17)$$

当然，不能不加分析地认为(4·16)和(4·17)已经解决了有理插值问题

$$R(x_j)=f(x_j),\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ m+n. \qquad (4\cdot18)$$

事实上，当取型值点为

(0, 1), (1, 1), (2, 3/5), (3, 2/5), (4, 5/17), (5, 3/13)

时，有理函数 $$R(x)=\frac{x+1}{x^2+1}$$

满足插值条件(4·18). 可是，如果按照格式(4·17)来计算连分式插值时，该算法实际上是行不通的. 因为显然有

$$\varphi_1[0,\ 1]=\infty.$$

产生这种现象的原因是相邻两节点上的纵坐标相等. 所以只须适当调整节点的位置，就可能使算法(4·17)得以实现.

T. N. Thiele 给出了一种倒差商格式，用它们可以得到递推计算公式. 所谓 $f(x)$ 的 1 阶，2 阶，3 阶，…倒差商，乃是

$$\rho_1(x,\ x_0)=\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)},$$

$$\rho_2(x,\ x_0,\ x_1)=\frac{x-x_1}{\rho_1(x,\ x_0)-\rho_1(x_0,\ x_1)}+f(x_0),$$

$$\rho_3(x,\ x_0,\ x_1,\ x_2)=\frac{x-x_2}{\rho_2(x,\ x_0,\ x_1)-\rho_2(x_0,\ x_1,\ x_2)}+\rho_1(x_0,\ x_1),$$

………………………………………………………

为了得到统一的递推公式，我们令

$$\rho_{-1}=0,\ \ \rho_0(x)=f(x), \tag{4·19}$$

则对于 $n=1, 2, \cdots$, 有如下的递推关系式

$$\begin{aligned}&\rho_n(x, x_0, \cdots, x_{n-1})\\&\quad=\frac{x-x_{n-1}}{\rho_{n-1}(x, x_0, \cdots, x_{n-2})-\rho_{n-1}(x_0, \cdots, x_{n-1})}\\&\qquad+\rho_{n-2}(x_0, x_1, \cdots, x_{n-2}).\end{aligned} \tag{4·20}$$

容易看出

$$\begin{aligned}f(x)&=f(x_0)+\frac{x-x_0}{\rho_1(x, x_0)}\\&=f(x_0)+\frac{x-x_0}{\rho_1(x_0, x_1)+}\frac{x-x_1}{\rho_2(x, x_0, x_1)-f(x_0)}\\&=f(x_0)+\frac{x-x_0}{\rho_1(x_0, x_1)+}\frac{x-x_1}{\rho_2(x_0, x_1, x_2)-f(x_0)}\\&\quad+\frac{x-x_2}{\rho_3(x, x_0, x_1, x_2)-\rho_1(x_0, x_1)}=\cdots.\end{aligned} \tag{4.21}$$

它可以任意延伸下去．若取它的各渐近分式，即可得到一批插值有理分式函数．例如，若取(4·21)的第 $m+n$ 渐近分式

$$\begin{aligned}&R_{m,n}(x)\\&=f(x_0)+\frac{x-x_0}{\rho_1(x_0, x_1)+}\frac{x-x_1}{\rho_2(x_0, x_1, x_2)-f(x_0)}\\&\quad+\frac{x-x_2}{\rho_3(x_0, x_1, x_2, x_3)-\rho_1(x_0, x_1)}+\cdots\\&\quad+\frac{x-x_{m+n-1}}{\rho_{m+n}(x_0, x_1, \cdots, x_{m+n})-\rho_{m+n-2}(x_0, x_1, \cdots, x_{m+n-2})},\end{aligned} \tag{4·22}$$

则 $R_{m,n}(x)$ 必然满足

$$R_{m,n}(x_j)=f(x_j),\ \ j=0, 1, \cdots, m+n.$$

顺便指出，由(4·22)给出的插值连分式相当于在(4·16)中取

$$
\left.\begin{aligned}
&a_0=f(x_0),\\
&a_1=\rho_1(x_0,\ x_1),\\
&a_2=\rho_2(x_0,\ x_1,\ x_2)-f(x_0),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_j=\rho_j(x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_j)-\rho_{j-2}(x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_{j-2}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{m+n}=\rho_{m+n}(x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_{m+n})\\
&\qquad-\rho_{m+n-2}(x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_{m+n-2}).
\end{aligned}\right\}\quad(4\cdot23)
$$

4-3 Salzer 算法

H. E. Salzer 在文 [66] 中给出了用连分式来计算切触有理插值的一种算法. 本节将介绍 H. E. Salzer 的这种算法.

设以连分式

$$
\begin{aligned}
N(x)/D(x)=a_{1,0}&+\frac{x-x_1}{a_{1,1}}+\frac{x-x_1}{a_{1,2}}+\cdots+\frac{x-x_1}{a_{1,r_1-1}}\\
&+\frac{x-x_1}{a_{2,0}}+\frac{x-x_2}{a_{2,1}}+\cdots+\frac{x-x_2}{a_{2,r_2-1}}\\
&+\frac{x-x_2}{a_{3,0}}+\cdots+\frac{x-x_{n-1}}{a_{n,0}}+\frac{x-x_n}{a_{n,1}}+\cdots\\
&+\frac{x-x_n}{a_{n,r_n-1}}
\end{aligned}\qquad(4\cdot24)
$$

来作切触插值

$$
\left[\frac{N(x)}{D(x)}\right]^{(m)}_{x=x_i}=f^{(m)}(x_i),\ m=0,\ 1,\ \cdots,\ r_i-1;\ i=1,\ 2,\ \cdots,n.\qquad(4\cdot25)
$$

连分式(4·24)有一个十分重要的性质，就是其中每一个待定常数 $a_{i,m}$ 都可以由 (4·25) 一个个地算出来. 并且它只和前面的各个系数 $a_{j,k}$ 有关，而与后面的每一个 $a_{j,k}$ 都是完全无关的.

这种连分式切触插值问题 (4·24)、(4·25) 可以看作是

Thiele 所考虑的连分式插值在切触插值情况下的推广.

为了应用前面提到的性质,先考察 $r_i=1(i=1, 2, \cdots, n)$ 的情况. 根据连分式各渐近分式之间的递推关系和插值条件, 可知

$$f(x_i)=\frac{p_i(x_i)}{q_i(x_i)}=\frac{a_{i,0}p_{i-1}(x_i)+(x_i-x_{i-1})p_{i-2}(x_i)}{a_{i,0}q_{i-1}(x_i)+(x_i-x_{i-1})q_{i-2}(x_i)}, \quad (4\cdot 26)$$

其中 $p_i(x)$, $q_i(x)$ 分别表示相应连分式的第 i 渐近分式的分子, 分母. 为统一起见, 把 $a_{1,0}$ 作为第 0 渐近分式.

相同的思想也可以用来逐步确定系数 $a_{i,0}, a_{i,1}, \cdots, a_{i,r_i-1}$ $(i=1, \cdots, n)$. 假定从已知的 $a_{1,0}, a_{1,1}, \cdots, a_{i-1,r_{i-1}-1}$ 我们已经求出 (4·24) 中的渐近分式

$$\frac{p_{s-1}(x)}{q_{s-1}(x)}, \quad \frac{p_{s-2}(x)}{q_{s-2}(x)},$$

其中 $s-1=\sum_{j=1}^{i-1} r_j$. 则

$$N(x)/D(x)=\frac{R_i(x)p_{s-1}(x)+(x-x_{i-1})p_{s-2}(x)}{R_i(x)q_{s-1}(x)+(x-x_{i-1})q_{s-2}(x)}, \quad (4\cdot 27)$$

其中

$$R_i(x)=a_{i,0}+\frac{x-x_i}{a_{i,1}}+\frac{x-x_i}{a_{i,2}}+\cdots+\frac{x-x_i}{a_{i,r_i-1}} + \frac{x-x_i}{a_{i+1,0}}+\frac{x-x_{i+1}}{a_{i+1,1}}+\cdots+\frac{x-x_n}{a_{n,r_n-1}}. \quad (4\cdot 28)$$

上式表明, 当着用于 $x=x_i$ 处 r_i 个切触插值条件确定 $a_{i,0}, a_{i,1}, \cdots, a_{i,r_i-1}$ 时, $R_i(x)$ 表达式 (4·28) 中自 $\frac{x-x_i}{a_{i+1,0}}+\cdots$ 以后各项的和可以忽略不管. 记 $R_i(x)$ 的这个截断有理分式为

$$R_i^*(x)=S_i(x)/T_i(x).$$

由定理 5 可知 $S_i(x)$ 和 $T_i(x)$ 满足

$$\begin{aligned}&[S_i(x)p_{s-1}(x)+(x-x_{i-1})T_i(x)p_{s-2}(x)]_{x=x_i}^{(m)}\\&\quad=[f(x)\{S_i(x)q_{s-1}(x)+(x-x_{i-1})T_i(x)q_{s-2}(x)\}]_{x=x_i}^{(m)},\\&\qquad m=0, 1, \cdots, r_i-1.\end{aligned} \quad (4\cdot 29)$$

剩下的运算乃是从这些 $S_i(x)$ 和 $T_i(x)$ 来求系数 $a_{i,0}, \cdots, a_{i,r_i-1}$.

最后，连分式 (4·24) 的渐近分式 $p_s(x)$, $q_s(x)$, $p_{s+1}(x)$, $q_{s+1}(x)$, …可以按下述递推关系来求出:

$$\left.\begin{aligned} p_{s+t}(x) &= a_{i,t}p_{s+t-1}(x) \\ &\quad + \begin{cases} (x-x_{i-1})p_{s+t-2}(x), & \text{当 } t=0, \\ (x-x_i)p_{s+t-2}(x), & \text{当 } t=1, \cdots, r_i-1, \end{cases} \\ q_{s+t}(x) &= a_{i,t}q_{s+t-1}(x) \\ &\quad + \begin{cases} (x-x_{i-1})q_{s+t-2}(x), & \text{当 } t=0, \\ (x-x_i)q_{s+t-2}(x), & \text{当 } t=1, \cdots, r_i-1. \end{cases} \end{aligned}\right\} \quad (4\cdot30)$$

把 i 换为 $i+1$, 把 s 换为 $s+r_i$, 再接着往下计算…….

当 r_i 的值较小时(比如 $r_i=2, 3$ 等等时)，这个算法还是很方便的.

在表 4·4 中，我们给出了当 $r_i=1, 2, 3, 4, 5, 6$ 时, $S_i(x)$ 和 $T_i(x)$ 的表达式. 其中将把 $a_{i,m}$ 简记之为 a_m.

按[56]中所介绍的 Euler-Minding 公式, $S_i(x)$ 和 $T_i(x)$ 还有一般的明显表达式:

$$\begin{aligned} S_i(x) = a_0a_1\cdots a_{r_i-1}\Bigg(1 &+ \sum_j^{0,r_i-2}(x-x_i)/a_ja_{j+1} \\ &+ \sum_{j<k}^{0,r_i-3}\sum(x-x_i)^2/a_ja_{j+1}a_{k+1}a_{k+2} \\ &+ \sum_{j<k<l}^{0,r_i-4}\sum\sum(x-x_i)^3/a_ja_{j+1}a_{k+1}a_{k+2}a_{l+2}a_{l+3}+\cdots\Bigg), \end{aligned} \quad (4\cdot31)$$

$$\begin{aligned} T_i(x) = a_1a_2\cdots a_{r_i-1}\Bigg(1 &+ \sum_j^{1,r_i-2}(x-x_i)/a_ja_{j+1} \\ &+ \sum_{j<k}^{1,r_i-3}\sum(x-x_i)^2/a_ja_{j+1}a_{k+1}a_{k+2}+\cdots\Bigg). \end{aligned}$$

表 4·4　$S_i(x)/T_i(x)$, $r_i=1(1)6$

r_i	$S_i(x)$	$T_i(x)$
1	a_0	1
2	$a_1a_0+(x-x_i)$	a_1
3	$a_2a_1a_0+(a_2+a_0)(x-x_i)$	$a_2a_1+(x-x_i)$
4	$a_3a_2a_1a_0+(a_3a_2+a_3a_0+a_1a_0)\cdot(x-x_i)+(x-x_i)^2$	$a_3a_2a_1+(a_3+a_1)(x-x_i)$
5	$a_4a_3a_2a_1a_0+(a_4a_3a_2+a_4a_3a_0+a_4a_1a_0+a_2a_1a_0)(x-x_i)+(a_4+a_2+a_0)(x-x_i)^2$	$a_4a_3a_2a_1+(a_4a_3+a_4a_1+a_2a_1)\cdot(x-x_i)+(x-x_i)^2$
6	$a_5a_4a_3a_2a_1a_0+(a_5a_4a_3a_2+a_5a_4a_3a_0+a_5a_4a_1a_0+a_5a_2a_1a_0+a_3a_2a_1a_0)(x-x_i)+(a_5a_4+a_5a_2+a_5a_0+a_3a_2+a_3a_0+a_1a_0)(x-x_i)^2+(x-x_i)^3$	$a_5a_4a_3a_2a_1+(a_5a_4a_3+a_5a_4a_1+a_5a_2a_1+a_3a_2a_1)(x-x_i)+(a_5+a_3+a_1)(x-x_i)^2$

4·4　Wuytack 算法

L. Wuytack 1975 年在文 [80] 中，给出了构造 §3 中表 3·1 对角线下半部分元素的一种计算方法. 这种方法是利用了序列 T_k 和 T_{k+1} 之间的某种关系而得到的. 自然，也可以给出完全类似的构造表 3·1 对角线上半部分元素的方法. 下面来介绍 Wuytack 算法.

考虑下述连分式($k\geqslant 0$)

$$g_k(x)=C_0+C_1(x-y_0)+\cdots+C_k\cdot(x-y_0)\cdots(x-y_{k-1})+\frac{C_{k+1}\cdot(x-y_0)\cdots(x-y_k)}{1}-\frac{q_1^{k+1}\cdot(x-y_{k+1})}{1}-\frac{e^{k+1}\cdot(x-y_{k+2})}{1}-\frac{q_2^{k+1}\cdot(x-y_{k+3})}{1}-\cdots. \tag{4·32}$$

如果由 (3·13) 给出的 $T_k=\{R_{k,0}(x),\ R_{k+1,0}(x),\ R_{k+1,1}(x),\ R_{k+2,1}(x),\ \cdots\}$ 中的各元素是彼此互异的. 则由 §3 定理 8, $g_k(x)$ 的各个系数可以这样来确定: 使 $g_k(x)$ 的第 n 渐近分式 $g_{k,n}(x)$ 等于 T_k 中的第 n 个元素.

D. Bernoulli (参阅 [2]) 曾经提出并解决了这样一个问题: 求一个连分式, 使其渐近分式具有预先给定的值 K_0, K_1, K_2, …. 其实下述连分式就满足所述的条件:

$$K_0+\frac{K_1-K_0}{1}+\frac{K_1-K_2}{K_2-K_0}+\frac{(K_1-K_0)(K_2-K_3)}{K_3-K_1}+\cdots+\frac{(K_{n-2}-K_{n-3})(K_{n-1}-K_n)}{K_n-K_{n-2}}+\cdots. \tag{4·33}$$

若一个连分式的渐近分式的某子序列为 K_0, K_1, …, 则说连分式(4·33)为由前一连分式紧缩而得.

因此可以找到连分式(4·32)的一个紧缩连分式 $h_k(x)$, 使其第 n 渐近分式 $h_{k,n}(x)$ 满足

$$h_{k,n}(x)=g_{k,2n+1}(x), \quad 当\ n\geqslant 0.$$

同理, 从 $g_{k+1}(x)$ 出发也有连分式 $h_{k+1}(x)$, 使其第 n 渐近分式 $h_{k+1,n}(x)$ 满足

$$h_{k+1,n}(x)=g_{k+1,2n}(x), \quad 当\ n\geqslant 0.$$

显然, $h_k(x)$ 和 $h_{k+1}(x)$ 的渐近分式表示相同的有理函数, 即

$$R_{k+1,0}(x),\ R_{k+2,1}(x),\ R_{k+3,2}(x),\ \cdots, \quad 当\ k\geqslant 0.$$

利用 $h_k(x)$ 和 $h_{k+1}(x)$ 相应系数相同的关系, 经标准化后可得关系式:

$$q_1^k=\frac{1}{d_1^k}\cdot\frac{C_{k+1}}{C_k}, \quad e_1^k=\frac{1}{d_1^k}\cdot q_1^{k+1}-q_1^k, \quad k\geqslant 1,$$

$$q_i^k=\frac{d_{i-2}^k}{d_i^k}\cdot\left[q_{i-1}^{k+1}\cdot\frac{e_{i-1}^{k+1}}{e_{i-1}^k}\right], \quad e_i^k=\frac{d_{i-1}^k}{d_i^k}\cdot[e_{i-1}^{k+1}+q_i^{k+1}]-q_i^k,$$

$$i\geqslant 2. \tag{4·34}$$

标准化常数 d_i^k 则满足下列关系 ($k\geqslant 1$)：

$$d_0^k=1,\quad d_1^k=1+\frac{C_{k+1}}{C_k}\cdot[y_{k+1}-y_k],$$

$$d_i^k=d_{i-1}^k\cdot[1+z_{k,i}\cdot e_{i-1}^{k+1}]-d_{i-2}^k\cdot z_{k,i}\cdot\left[q_{i-1}^{k+1}\cdot\frac{e_{i-1}^{k+1}}{e_{i-1}^k}\right],$$

$$z_{k,i}=y_{k+2i-2}-y_{k+2i-1},\quad i\geqslant 2. \tag{4·35}$$

表 3·1 的第一列元素 $R_{k,0}(x)$ ($k\geqslant 0$) 是切触多项式(分母为零次). 这说明系数 C_0, C_1, C_2, …可以利用带汇集变量的差商来计算 (例如可参考 [67]). 下面的表 4·5 给出了 Wuytack 算法所涉及的系数表:

表 4·5　Wuytack 算法系数表

d_1^1	q_1^1							
		e_1^1						
d_1^2	q_1^2		d_2^1	q_2^1				
		e_1^2			e_2^1			
d_1^3	q_1^3		d_2^2	q_2^2		d_3^1	q_3^1	
$\vdots$	$\vdots$	e_1^3	$\vdots$	$\vdots$	e_2^2	$\vdots$	$\vdots$	e_3^1
		$\vdots$			$\vdots$			

为方便计，定义 $e_0^k=0$ ($k\geqslant 0$)，这样一来，(4·34)式中关于 e_i^k 的公式就可用于 $i=1$ 的情况了. 上述表 4·5 中的第一列和第二列可用(4·34)和(4·35)的上面一行的公式来计算. 其它各列的值则需用(4·34)和(4·35)的其它公式.

例　设

$$x_0=0,\ x_1=1,\ s_0=s_1=2,$$

$$f_0^{(0)}=1,\ f_0^{(1)}=f_1^{(0)}=2,\ f_1^{(1)}=3.$$

利用带汇集变量的差商运算可得

$$C_0=1,\ C_1=2,\ C_2=-1,\ C_3=3.$$

这样一来，我们就可以形成切触连分式(4·32)，它的渐近分式

是 $f(x)$ 的 (m, n) 切触有理分式:

$$R_{0,0}(x)=1,$$

$$R_{1,0}(x)=1+2x, \qquad R_{1,1}(x)=\frac{1+3x}{1+x},$$

$$R_{2,0}(x)=1+2x-x^2,$$

$$R_{3,0}(x)=1+2x-4x^2+3x^3, \quad R_{2,1}(x)=\frac{5x^2-x-2}{3x-2}.$$

第2章

有理 Чебышев 逼近

我们知道，函数在 Чебышев 意义下的逼近问题是与电子计算机的记忆部分中利用最经济的方法近似地表示函数的问题密切相关的. 因为在许多情况下，Чебышев 逼近恰好是最经济的.

特别是随着电子计算机的飞速发展，使在求解 Чебышев 逼近时非常困难的一些计算已有实现的可能. 正因为如此，最近十多年来关于有理 Чебышев 逼近的理论与数值方法的研究工作逐渐增多起来，并已有相当数量的论文出现.

在目前有理 Чебышев 逼近已有相当发展的时期，作为有理逼近的一个重要内容，本书理应对此作一番简要的介绍.

本章§1，介绍通常形式的有理分式的 Чебышев 逼近理论. 主要讨论了最佳逼近有理分式的存在性，特征性质和唯一性问题. 为使我们的讨论能够适用于更广的范围，我们在§2中就广义有理分式的 Чебышев 逼近问题进行了讨论. 值得一提的是，Boehm 在研究广义有理 Чебышев 逼近的存在性问题中所引入的所谓"非零稠密"的概念是一个十分重要的概念. 看来它是保证最佳有理 Чебышев 逼近存在的关键. 本章§3中，就具有约束条件的通常有理分式的 Чебышев 理论进行了讨论. 在最后的§4中，我们还介绍了几种有理 Чебышев 逼近数值计算的方法，以供从事实际工作的读者们参考.

§1 有理 Чебышев 逼近*

在讨论有理 Чебышев 逼近问题之前，我们先引进一些必要的预备知识.

设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上定义的实值连续函数，$F(A, x)$ 是 $f(x)$ 的近似函数，其中

$$A=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

是 n 个参数组成的 n 维欧氏空间的点. 点 A 可以取遍 n 维欧氏空间 E_n 的一部分或一个子空间 P，也可取 $P=E_n$.

定义 1 近似函数 $F(A, x)$，$P\subset E_n$ 说是对模 $\|\cdot\|$ 满足条件 E，如果对给定的 $M<\infty$，存在 $N<\infty$，使由

$$\|F(A, x)\|\leqslant M \tag{1·1}$$

可推出

$$\max_i|a_i|\leqslant N. \tag{1·2}$$

定义 2 一个近似函数 $F(A, x)$ 说是有 n 阶可解性的，如果对 $[a, b]$ 中 n 个不同点 $x_1<x_2<\cdots<x_n$ 和 n 个任意数 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，恒存在 $A\in P$，使得

$$F(A, x_i)=y_i,\quad i=1, 2, \cdots, n. \tag{1·3}$$

定义 3 近似函数 $F(A, x)$ 说是在 $[a, b]$ 内具有 n 阶性质 Z，如果 $A_1, A_2\in P$，且 $A_1\neq A_2$ 时，$F(A_1, x)-F(A_2, x)$ 于 $[a, b]$ 内最多有 $n-1$ 个零点.

当 $F(A, x)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\varphi_i(x)$，即线性情况时，定义 3 几乎等价于，但并不完全等价于基函数组 $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 是一个 Чебышев 函数组. 其不等价的理由是因为不一定有 $P=E_n$.

---

* 可参见参考文献 [1]、[63].

例如 $\{1, x^2\}$ 于 $[-1, 1]$ 上不是一个 Чебышев 函数组，然而近似函数

$$F(A, x)=\alpha+\beta x^2,$$

$$P=\left\{(\alpha, \beta)\,|\,\alpha=0, \pm1, \pm2, \cdots;\ |\beta|\leqslant\frac{1}{4}\right\}$$

于 $[-1, 1]$ 上具有 2 阶性质 Z.

定义 4 如果 $F(A, x)$ 满足:

（i）它有 n 阶可解性,

（ii）具有 n 阶性质 Z,

则称 $F(A, x)$ 是有唯一可解性的.

因为当假定 $F(A, x)$ 具有性质 Z 时，方程组 (1·3) 将有唯一解，此即意味着单一可解性.

今考虑有理型逼近函数

$$R(A, x)=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m},$$

其中

$$b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m\neq0,\quad 0\leqslant x\leqslant1. \tag{1·4}$$

为使表达式形式唯一，我们假定有理分式 $R(A, x)$ 是最简有理分式，即其分子、分母是不可约的，并假定

$$P=\left\{(a_0, a_1, \cdots, a_n, b_0, b_1, \cdots, b_m)\,\middle|\,\sum_{i=0}^{m}b_i^2=1;\right.$$

$$\left.b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m\neq0,\quad x\in[0, 1]\right\}. \tag{1·5}$$

对于给定的于 $[0, 1]$ 上连续的函数 $f(x)$，定义有理分式逼近 $R(A, x)$ 与 $f(x)$ 的偏差为

$$H_A=\max_{0\leqslant x\leqslant1}|f(x)-R(A, x)|$$

$$=\|f(x)-R(A, x)\|^*. \tag{1·6}$$

---

* 在本章中，我们自始至终所用的都是这种 Чебышев C 模，而不特别声明.

而最佳有理分式逼近(Чебышев 逼近)问题，乃是寻求 $A_0 \in P$，使得

$$H_{A_0} = \|f(x) - R(A_0, x)\| = \inf_{A \in P} \|f(x) - R(A, x)\|. \tag{1·7}$$

如此的有理分式 $R(A_0, x)$ 称为 $f(x)$ 的最佳 Чебышев 逼近有理分式，简称最佳逼近有理分式.

对于给定的函数 $f(x)$ 来说，主要需要解决三个大问题：最佳逼近有理分式的存在性、唯一性和特征的问题.

本节将主要讨论最佳逼近有理分式的存在性问题.

引理 1 按 (1·4) 式定义的有理分式 $R(A, x)$ 满足条件 E.

证明 因为

$$|R(A, x)| \geqslant \frac{\left|\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right|}{\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1}\left|\sum_{i=0}^{m} b_i x^i\right|} \geqslant \frac{1}{m+1}\left|\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right|,$$

所以只要

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |R(A, x)| \leqslant M, \tag{1·8}$$

就有

$$(m+1)M \geqslant (m+1) \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |R(A, x)| \geqslant \max_{0 \leqslant x \leqslant 1}\left|\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right|.$$

从 $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ 于 $[0, 1]$ 上的一致有界性，可知各个参数 $a_i (i=0, 1, \cdots, n)$ 也是有界的. 即有 $N(M)$ 存在，使得

$$\max_i |a_i| \leqslant N(M).$$

至于参数 $b_i (i=0, 1, \cdots, m)$ 的有界性，那是 (1·5) 式的直接推论. 引理证完.

虽然 P 是 E_{n+m+2} 的一个子集，可是 P 与 E_{n+m+2} 并非是拓扑等价的. 例如对于 $n=0$, $m=2$,

$$R(A_k, x)=\frac{1/k}{(1/k)+\sqrt{1-(1/k^2)\,x^2}}, \quad x\in[-1, 1]. \tag{1·9}$$

显然

$$\lim_{k\to\infty} R(A_k, x)=f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x=0,\\ 0, & \text{当 } x\neq 0.\end{cases} \tag{1·10}$$

而且 $\lim\limits_{k\to\infty}(a_{0k}, b_{0k}, b_{1k})=A_0=(0, 0, 1)$,

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|R(A_k, x)-R(A_0, x)|=\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|R(A_k, x)|=1.$$

上面例子说明存在一致有界的有理函数序列，它不收敛于某有理函数. 其实对于形如 $a_0/(b_0+b_1x+b_2x^2)$ 的 $R(A, x)$，我们不难构造一个连续函数 $g(x)$，使得

$$\lim_{k\to\infty}\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|g(x)-R(A_k, x)|$$
$$=\inf_{A\in P}\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|g(x)-R(A, x)|,$$

且 $R(A_k, x)$ 满足 (1·10) 式. 然而我们可以指出每个连续函数都具有最佳逼近有理分式. 首先指出，任一逐点收敛的有理函数序列 $\{R(A_k, x)\}$，除可能去掉一个有限点集外，收敛于一个有理函数 $R(A_0, x)$；即可能有有限个点（少于 m）x_i，使

$$\lim_{k\to\infty} R(A_k, x)=\begin{cases}R(A_0, x), & \text{当 } x\neq x_i,\\ \text{任意值}, & \text{当 } x=x_i.\end{cases} \tag{1·11}$$

引理 2 设 $\{R(A_k, x)\}$ 是一个于 $[0, 1]$ 上一致有界的有理函数列. 则存在一个有理函数 $R(A_0, x)$，$\{R(A_k, x)\}$ 的一个子序列 $\{R(A'_k, x)\}$ 以及 $[0, 1]$ 中的一个点集 $\{x_i|i=1, 2, \cdots, p;\ p\leqslant m\}$，使得

$$\lim_{k\to\infty} R(A'_k, x) = \begin{cases} R(A_0, x), & \text{当 } x \neq x_i, \\ f_i, & \text{当 } x = x_i. \end{cases}$$

证明 由引理1，函数 $R(A_k, x)$ 的参数是一致有界的。因为它们是实数，于是由 Bolzano-Weierstrass 定理，从 $\{A_k\}$ 中可以选出一个收敛的子序列 $\{A'_k\}$，比如其收敛于 A_0. 设 $R(A_0, x)$ 分母在 $[0, 1]$ 中的零点为 $\{x_i | i=1, 2, \cdots, p\}$. 显然 $p \leqslant m$.

如果 $x \neq x_i$，则自然有

$$\lim_{k\to\infty} R(A'_k, x) = R(A_0, x).$$

因为原序列是一致有界的，所以序列 $\{R(A'_k, x_i)\}$ 是一致有界的，从而应该有另一个 $\{R(A'_k, x)\}$ 的子序列它在每个 x_i 点处的函数值收敛于 f_i. 证毕.

引理3 若由 (1·11) 定义的一个函数是 $[0, 1]$ 上连续函数 $f(x)$ 的最佳 Чебышев 有理逼近，则 $R(A_0, x)$ 亦是.

证明 设 $S(x)$ 表示函数 (1·11)，则有

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x) - S(x)| \\
&= \max\Big[\sup_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1 \\ x\neq x_i}} |f(x) - S(x)|;\ |f(x_i) - S(x_i)|, i=1, 2, \cdots, p\Big] \\
&\geqslant \sup_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1 \\ x\neq x_i}} |f(x) - R(A_0, x)| = \max_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x) - R(A_0, x)|.
\end{aligned}$$

因此 $S(x)$ 与 $f(x)$ 的偏差大于等于 $R(A_0, x)$ 与 $f(x)$ 的偏差. 引理得证.

定理1 设 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的连续函数. 则 $f(x)$ 在形如 (1·4) 的有理分式类上的最佳 Чебышев 有理逼近分式是存在的.

证明 设

$$M = \max_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)|,$$

并定义 $$P_M=\{A \mid \max_{0\le x\le 1}|R(A,\ x)|\le 2M\}.$$

显然，如果最佳逼近存在的话，其参数一定位于 P_M 中．因而有序列

$$\{R(A_k,\ x)\},\quad A_k\in P_M,$$

使得

$$\lim_{k\to\infty}\max_{0\le x\le 1}|f(x)-R(A_k,\ x)|$$
$$=\inf_A\max_{0\le x\le 1}|f(x)-R(A,\ x)|=\rho.$$

由引理2，存在 $\{R(A_k,\ x)\}$ 的一个子序列逐点收敛于形如(1·11)的函数 $S(x)$，且

$$\max_{0\le x\le 1}|f(x)-S(x)|=\rho.$$

设 $R(A_0,\ x)$ 是 $S(x)$ 构造中的函数（见(1·11)式），由引理3，有

$$\max_{0\le x\le 1}|f(x)-R(A_0,\ x)|=\rho.$$

于是定理1得证．

下例表明定理1对于有限点集上的逼近来说是不成立的．

例 在点集 $\{x_i\}=\{-1,\ 0,\ 1\}$ 上考虑用形如 $1/(a+bx+cx^2)$ 的函数逼近相应函数值 $\{y_i\}=\{0,\ 1,\ 0\}$．我们有

$$\max_{x_i}\left(y_i-\frac{1}{1+kx_i^2}\right)=\frac{1}{1+k},$$

因此 $$\inf_{A\in P}|y_i-R(A,\ x_i)|=0.$$

然而却没有一个有理函数

$$1/(a+bx+cx^2)$$

能够取到这个偏差值．

定义5 形如(1·4)的有理函数 $R(A,\ x)$ 于 $A\in P$ 是 $m(A)=n+m-d+1$ 阶的，如果

$$R(A,\ x)=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_{n-p}x^{n-p}}{b_0+b_1x+\cdots+b_{m-q}x^{m-q}}\tag{1·12}$$

是一个最简有理分式(即分子、分母互质),而 $d=\min(p,\ q)$, $a_{n-p}\neq 0$, $b_{m-q}\neq 0$. 如果 $R(A,\ x)\equiv 0$,则 $m(A)=n+1$.

引理 4 有理函数 $R(A^*,\ x)$ 于 A^* 具有 $m(A^*)$ 阶性质 Z.

证明 对于任意 A, 考虑 $R(A^*,x)-R(A,x)$. 设 $N(A,x)$ 和 $D(A,\ x)$ 分别表示 $R(A,\ x)$ 的分子和分母. 则

$$R(A^*,\ x)-R(A,\ x)$$
$$=\frac{N(A^*,\ x)D(A,\ x)-N(A,\ x)D(A^*,\ x)}{D(A,\ x)D(A^*,\ x)}.\tag{1·13}$$

上述等式右端分母连续且不变号. 因而 $R(A^*,\ x)-R(A,\ x)$ 和(1·13)右端分子具有同样的零点个数. 而这个分子是一个次数不超过 $n-d+m$ 的多项式, 因此其零点个数不超过 $n+m-d=m(A^*)-1$. 引理得证.

引理 5 对于给定的 $R(A^*,\ x)$ 和 $[0,\ 1]$ 中的点集

$$\{x_i\,|\,i=1,\ 2,\ \cdots,\ \bar{p};\ \bar{p}=m(A^*),\ x_i<x_{i+1}\},$$

则存在充分接近 $R(A^*,\ x)$ 的有理函数 $R(A,\ x)$, 使得

$$\operatorname{sign}\,[R(A^*,\ x)-R(A,\ x)]=(-1)^{i+1},$$
$$x\in[x_i,\ x_{i+1}],\quad i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \bar{p}.\tag{1·14}$$

其中若 $x_1\neq 0$, 则取 $x_0=0$; 若 $x_{\bar{p}}\neq 1$, 则取 $x_{\bar{p}+1}=1$.

证明 取

$$\psi(x)=\prod_{i=1}^{\bar{p}}(x_i-x).$$

因为 $N(A^*,\ x)$ 和 $D(A^*,\ x)$ 互质, 所以由多项式的可除性理论应有多项式 $u(x)$ 和 $v(x)$ 存在, 使得

$$N(A^*,\ x)u(x)+D(A^*,\ x)v(x)\equiv 1.$$

以 $\psi(x)$ 乘上式两边, 有

$$N(A^*, x)u^*(x)+D(A^*, x)v^*(x)\equiv\psi(x). \qquad (1\cdot15)$$

今作带余除法

$$u^*(x)\equiv D(A^*, x)\cdot q_1(x)+r_1(x),$$
$$v^*(x)\equiv N(A^*, x)\cdot q_2(x)+r_2(x),$$

其中 $r_1(x)$ 与 $r_2(x)$ 的次数分别不超过 $n-p$ 与 $m-q$. 以之代入(1·15), 得到

$$N(A^*, x)D(A^*, x)[q_1(x)+q_2(x)]+N(A^*, x)r_1(x)$$
$$+D(A^*, x)r_2(x)\equiv\psi(x). \qquad (1\cdot16)$$

比较(1·16)式两边次数, 可知 $[q_1(x)+q_2(x)]$ 的次数 $\leqslant p+q-d$. 于是 (1·16) 表明有次数分别不超过 n 和 m 的多项式 $N(A, x)$ 和 $D(A, x)$, 使

$$\psi(x)=N(A^*, x)D(A, x)-N(A, x)D(A^*, x).$$

今考虑有理函数

$$R(A, x)=\frac{N(A^*, x)-\varepsilon N(A, x)}{D(A^*, x)-\varepsilon D(A, x)},$$

其中 ε 为尚待确定的一个参数. 显然

$$R(A^*, x)-R(A, x)=\frac{-\varepsilon\psi(x)}{D(A^*, x)[D(A^*, x)-\varepsilon D(A, x)]}. \qquad (1\cdot17)$$

由于 $D(A^*, x)$ 于[0, 1]中没有零点, 所以只要 ε 充分小就可使(1·17)右端分母于[0, 1]上不为零. 并可选择充分小的 ε, 使得 $R(A, x)$ 充分靠近 $R(A^*, x)$. 因而 $R(A, x)$ 即为所要求的有理函数. 引理证完.

定义 6 误差曲线 $f(x)-R(A, x)$ 说是在点集 S 上交错 n 次, 如果于 S 中有 $n+1$ 个点

$$x_1<x_2<\cdots<x_{n+1}$$

存在, 使得

$$f(x_i)-R(A, x_i)=\alpha\cdot(-1)^i\|f(x)-R(A, x)\|,$$
$$i=1, 2, \cdots, n, \qquad (1\cdot18)$$

其中 $\alpha=-\text{sign}\{f(x_1)-R(A, x)\}$.

并且此时称 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ 为 $R(A, x)$ 的一个交错点组. $x_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 均称为极值点,或偏离点.

定理 2 设 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的连续函数. 则

(i) 为使 $R(A^*, x)$ 是 $f(x)$ 的最佳逼近有理分式,必须且只须 $R(A^*, x)$ 有一个点数不少于 $m(A^*)+1$ 的交错点组,也即误差曲线 $f(x)-R(A^*, x)$ 于 $[0, 1]$ 上至少交错 $m(A^*)$ 次;

(ii) $f(x)$ 的最佳逼近有理分式 $R(A^*, x)$ 是唯一的.

定理 2 陈述中的结论 (i) 就是关于最佳 Чебышев 逼近有理分式的特征性质, 而结论 (ii) 所述的是最佳 Чебышев 逼近有理分式的唯一性. 它们连同定理 1 所述的存在性一起就解决了最佳 Чебышев 有理逼近的基本理论问题.

证明 先证 (i). 为证充分性, 假设误差函数 $f(x)-R(A^*, x)$ 于 $[0, 1]$ 交错 N 次, 其中 $N\geqslant m(A^*)$. 即有点列 $\{x_i\}_{i=1}^{N+1}$ 存在:

$$0\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_N<x_{N+1}\leqslant 1, \qquad (1\cdot19)$$

使得

$$f(x_i)-R(A^*, x_i)=\alpha\cdot(-1)^i\|f(x)-R(A^*, x)\|,$$
$$i=1, 2, \cdots, N+1, \qquad (1\cdot20)$$

而 $\alpha=-\text{sign}\{f(x_1)-R(A^*, x_1)\}$.

如果还有 $R(A', x)$ 存在,使得

$$\|f(x)-R(A', x)\|<\|f(x)-R(A^*, x)\|. \qquad (1\cdot21)$$

则由于点列(1·19)是 $|f(x)-R(A^*, x)|$ 的极值点,

$$|f(x_i)-R(A^*, x_i)|=\|f(x)-R(A^*, x)\|.$$

于是由假设(1·21), 可知

$$R(A', x)-R(A^*, x)=[f(x)-R(A^*, x)]$$
$$-[f(x)-R(A', x)] \quad (1\cdot 22)$$

于点列(1·19)上与$f(x)-R(A^*, x)$同号. 即

$$\operatorname{sign}\{R(A', x_i)-R(A^*, x_i)\}$$
$$=-\operatorname{sign}\{R(A', x_{i+1})-R(A^*, x_{i+1})\},$$
$$i=1, 2, \cdots, N. \quad (1\cdot 23)$$

它说明$R(A', x)-R(A^*, x)$于$[0, 1]$上至少有$N\geqslant m(A^*)$个零点, 即$R(A^*, x)$有不低于$m(A^*)+1$阶性质Z. 由引理4, 这是不可能的. 因而(1·21)不可能成立. 即$R(A^*, x)$确实为$f(x)$的最佳逼近有理分式. (i)的充分性得证.

再证(i)的必要性. 假定$R(A^*, x)$是$f(x)$的最佳逼近有理分式. 如果误差函数$f(x)-R(A^*, x)$于$[0, 1]$上恰好交错k次, $k<m(A^*)$. 则我们可以证明$R(A^*, x)$必不是$f(x)$的最佳逼近有理分式.

把区间$[0, 1]$用下面$k+2$个分点分成$k+1$个子区间$[\xi_i, \xi_{i+1}]$ $(i=0, 1, \cdots, k)$:

$$0=\xi_0<\xi_1<\cdots<\xi_k<\xi_{k+1}=1,$$

使得一方面

$$f(\xi_i)-R(A^*, \xi_i)=0, \quad i=1, 2, \cdots, k;$$

另一方面$f(x)-R(A^*, x)$于任意相邻两子区间上反号. 并且各子区间(ξ_i, ξ_{i+1})内恰含$R(A^*, x)$的一个偏离点x_{i+1}.

显然存在某$\varepsilon_0>0$, 使得在子区间列

$$[0, \xi_1], [\xi_1, \xi_2], \cdots, [\xi_i, \xi_{i+1}], \cdots, [\xi_k, 1] \quad (1\cdot 24)$$

上轮流满足下述两式之一:

$$-\|f(x)-R(A^*, x)\|\leqslant f(x)-R(A^*, x)$$
$$<\|f(x)-R(A^*, x)\|-\varepsilon_0,$$

$$-\|f(x)-R(A^*, x)\|+\varepsilon_0<f(x)-R(A^*, x) \leqslant\|f(x)-R(A^*, x)\|.$$

因为对于任何 $R(A, x)$ 来说，显然

$$f(x)-R(A, x)=[f(x)-R(A^*, x)] +[R(A^*, x)-R(A, x)].$$

作多项式

$$\psi(x)=(x-\xi_1)\cdots(x-\xi_k), \tag{1·25}$$

则与引理 5 证明中一样，可求得有理分式

$$R(A, x)=N(A, x)/D(A, x),$$

使得

$$R(A^*, x)-R(A, x) =\frac{-\varepsilon\psi(x)}{D(A^*, x)[D(A^*, x)-\varepsilon D(A, x)]}, \tag{1·26}$$

其中 $D(A^*, x)$ 为 $R(A^*, x)=N(A^*, x)/D(A^*, x)$ 的分母. 因此只要把 $|\varepsilon|$ 取得充分小，并调节 ε 的正负号，就可使

$$-\mathrm{sign}\{R(A^*, x_j)-R(A, x_j)\} =\mathrm{sign}\{f(x_j)-R(A^*, x_j)\},$$

并从而使

$$\|f(x)-R(A, x)\|<\|f(x)-R(A^*, x)\|.$$

此与 $R(A^*, x)$ 是 $f(x)$ 的最佳 Чебышев 逼近有理分式的假设前提相矛盾. (i) 的必要性证完.

再证(ii). 采用反证法. 设除 $R(A^*, x)$ 外，还有 $R(A', x)$ 满足

$$\|f(x)-R(A', x)\|=\|f(x)-R(A^*, x)\|. \tag{1·27}$$

设

$$0\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_N\leqslant 1 \tag{1·28}$$

与

$$0\leqslant x_1'<x_2'<\cdots<x_{N'}'\leqslant 1$$

分别为 $R(A^*, x)$ 与 $R(A', x)$ 的交错点组. 由本定理的特征

性结论 (i)，应有

$$N \geqslant m(A^*)+1, \quad N' \geqslant m(A')+1. \tag{1·29}$$

为确定起见，不妨假定 $N' \geqslant N$. 考虑

$$\begin{aligned}\eta(x) &= R(A^*, x)-R(A', x) \\ &= [f(x)-R(A', x)]-[f(x)-R(A^*, x)].\end{aligned} \tag{1·30}$$

显然，只要 x'_j 也是 $R(A^*, x)$ 的同类偏离点，即 x'_j 满足

$$\begin{aligned}f(x'_j)-R(A', x'_j) &= f(x'_j)-R(A^*, x'_j) \\ &= \pm\|f(x)-R(A', x)\|\end{aligned}$$

时，应有

$$\eta(x'_j)=0. \tag{1·31}$$

否则，当 $\eta(x'_j)\neq 0$ 时，应该有

$$\operatorname{sign}\eta(x'_j)=\operatorname{sign}\{f(x'_j)-R(A', x'_j)\}. \tag{1·32}$$

为确定起见，比方设

$$\begin{gathered}\eta(x'_{j-1})\neq 0, \quad \eta(x'_{j+l+1})\neq 0, \\ \eta(x'_j)=\eta(x'_{j+1})=\cdots=\eta(x'_{j+l})=0.\end{gathered} \tag{1·33}$$

按交错点组的定义和(1·32)式，可知

$$(-1)^{j-1}\{f(x'_{j-1})-R(A', x'_{j-1})\}$$

与

$$(-1)^{j+l+1}\{f(x'_{j+l+1})-R(A', x'_{j+l+1})\}$$

同号. 因此由(1·30)与(1·32)可得

$$\begin{aligned}&\operatorname{sign}(-1)^{j-1}\{R(A^*, x'_{j-1})-R(A', x'_{j-1})\} \\ &\quad=\operatorname{sign}(-1)^{j+l+1}\{R(A^*, x'_{j+l+1})-R(A', x'_{j+l+1})\}.\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&\operatorname{sign}\{R(A^*, x'_{j-1})-R(A', x'_{j-1})\} \\ &\quad=\operatorname{sign}(-1)^{l}\{R(A^*, x'_{j+l+1})-R(A', x'_{j+l+1})\}.\end{aligned} \tag{1·34}$$

根据连续函数的中间值定理和符号关系 (1·34)，容易说明函数

$$R(A^*, x)-R(A', x)$$

于 $[x'_{j-1}, x'_{j+l+1}]$ 中零点数与 l 的奇偶性相同. 例如当 l 为奇

数时，由(1·34)可知函数 $R(A^*,x)-R(A',x)$ 于 $[x'_{j-1}, x'_{j+l+1}]$ 两端异号. 由连续函数性质可知 $R(A^*, x)-R(A', x)$ 于区间 $[x'_{j-1}, x'_{j+l+1}]$ 中应有奇数个零点(计算重数在内).

由(1·33)，$R(A^*, x)-R(A', x)$ 已有 $l+1$ 个零点，因而根据上述分析，应还有 $R(A^*, x)-R(A', x)$ 的一零点. 从而 $R(A^*, x)-R(A', x)$ 于 $[x'_{j-1}, x'_{j+l+1}]$ 中有 $l+2$ 个零点. 逐个进行上面的讨论，可推知 $R(A^*, x)-R(A', x)$ 于 $[0, 1]$ 内至少有 $N'-1$ 个零点.

由引理 4，$R(A^*, x)-R(A', x)$ 于 $[0, 1]$ 最多只能有 $m(A^*)-1$ 个零点(当 $A^*\neq A'$ 时). 而由(1·29)和上面讨论，$R(A^*, x)-R(A', x)$ 已有 $N'-1\geqslant m(A^*)$ 个零点. 所以必有

$$A'=A^*.$$

唯一性结论(ii)得证.

定理 2 就是最佳有理逼近的 Чебышев 定理. 它是有理逼近理论中最重要的也是最有思想性的定理. 往后的大量发展，都基本上是以它为出发点的.

§2 广义有理 Чебышев 逼近

本节将在比§1更广泛的意义下讨论有理 Чебышев 逼近问题.

设 $\varphi_i(x)\,(i=1, \cdots, n)$，$\psi_j(x)\,(j=1, \cdots, m)$是区间$[0, 1]$上的连续函数，且设 $\{\varphi_i(x)\}$、$\{\psi_j(x)\}$ 分别是两个线性无关函数系. 考虑广义有理函数系

$$R(c, x)=\frac{N(A, x)}{D(B, x)}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\varphi_i(x)}{\sum\limits_{j=1}^{m} b_j\psi_j(x)}, \qquad (2\cdot1)$$

其中参数 P 取遍 $n+m$ 维欧氏空间 E_{n+m} 的下述子集:

$$P=\left\{C\in E_{n+m}\left|\sum_{j=1}^{m}|b_j|=1\right.\right\}. \qquad (2\cdot2)$$

因为在假设条件(2·2)下,仍然可能对于某些点 x_0 而有

$$b_1\psi_1(x_0)+b_2\psi_2(x_0)+\cdots+b_m\psi_m(x_0)=0.$$

所以需要要求此时仍能足以唯一确定有理函数 $R(c,x)$, 比如当 $\varphi_i(x)=x^{i-1}$, $\psi_j(x)=x^{j-1}$ 时需要在 (2·1) 和 (2·2) 之外, 要求 (2·1) 处处有界或 $R(c,x)$ 为最简分式等等.

定义 7 如果对任给 $C\in P$, 函数

$$b_1\psi_1(x)+b_2\psi_2(x)+\cdots+b_m\psi_m(x)$$

于[0, 1]中的一个稠密集 X_c 上不等于 0, 则称函数组 $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, …, $\psi_m(x)$ 具有在 [0, 1] 上非零稠密的性质. 简称 $\psi_1(x)$, …, $\psi_m(x)$ 非零稠密.

$\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, …, $\psi_m(x)$ 非零稠密性, 相当于在 [0, 1] 的一切开子集上, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, …, $\psi_m(x)$ 都是线性无关的. 在这种情况下, $R(C,x)$ 在 X_c 上的定义是确定的. 为了在点 $x_0\in[0,1]-X_c$ 处唯一确定 $R(c,x)$, 我们取

$$R(c,x_0)=\limsup_{x\in X_C,\,x\to x_0}R(c,x). \qquad (2\cdot3)$$

如果

$$\lim_{x\in X_C,\,x\to x_0}R(c,x)$$

存在, 自然它应该等于 $R(c,x_0)$. 这样一来, 如果函数组 $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, …, $\psi_m(x)$ 在 [0, 1] 上非零稠密, 则对一切 $C\in P$ 而言, 广义有理分式函数 $R(c,x)$ 于 [0, 1] 上唯一确定.

例 1 设 $f(x)=x$, 欲用有理分式

$$R(c,x)=\frac{a_1x^2}{b_1+b_2x}$$

于 [0, 1] 作最佳逼近, 其中进一步要求上述有理分式的分母

大于 0($0\leqslant x\leqslant 1$). 显然

$$\inf\|f(x)-R(c,\ x)\|=0,$$

并且当 $C^*=(1,\ 0,\ 1)$ 时, $f(x)-R(c^*,\ x)$ 取到这个值. 但

$$D(B^*,\ 0)=0+1\cdot 0=0,$$

所以实际上 $R(c^*,\ x)$ 并不属于所允许的有理分式类.

例 2 设 $f(x)=(x-1)(x-2)/2$, 欲用

$$R(c,\ x)=\frac{a_1}{b_1+b_2x} \tag{2·4}$$

在点集 0, 1, 2 上作最佳有理逼近. 因为

$$f(0)=1,\ \ f(1)=f(2)=0,$$

我们看出有理分式

$$R(c^*,\ x)=\frac{\varepsilon}{x+\varepsilon}$$

与 $f(x)$ 在 $x=0$, 1, 2 上的偏差不大于 $\varepsilon/(1+\varepsilon)$. 由于 ε 可以取得任意小, 所以

$$\inf\|f(x)-R(c,\ x)\|=0.$$

然而我们确实选不出 (2·4) 型的 $R(c,\ x)$, 使其达到这个极小值. 即这类最佳有理逼近是不存在的.

引理 6 若 $f(x)$, $\psi_1(x)$, $\cdots$, $\psi_m(x)$ 于 $[0,\ 1]$ 上有界, $\psi_1(x)$, $\cdots$, $\psi_m(x)$ 于 $[0,\ 1]$ 上非零稠密, 并且 $\varphi_1(x)$, $\cdots$, $\varphi_n(x)$ 于 $[0,\ 1]$ 上线性无关. 则对于满足

$$\lim_{k\to\infty}\|R(c_k,\ x)-f(x)\|=\inf_{C\in P}\|R(c,\ x)-f(x)\| \tag{2·5}$$

的一切序列 $\{C_k\}$ 而言, 它们都分别有聚点 $C^*\in P$ 存在.

证明 定义函数

$$A=\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i(x),\quad B=\sum_{j=1}^{m}b_j\psi_j(x),$$

其中

$$\sum_{j=1}^{m}|b_j|=1.$$

再类似地定义 A_k 和 B_k. 由各 $\psi_j(x)$ 的有界性可知对任意 B, 均有

$$\|B\|\leqslant N=\max_j\|\psi_j(x)\|.$$

又由 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\cdots$, $\varphi_n(x)$ 的线性无关性，可知存在正数 δ, 使得从

$$\sum_{i=1}^n|a_i|=1$$

推出

$$\|A\|\geqslant\delta.$$

显然对于充分大 K, 当 $k\geqslant K$ 时，有

$$\frac{\|A_k\|}{N}\leqslant\|R(c_k,\ x)\|\leqslant 1+\inf_{C\in P}\|f(x)-R(c,\ x)\|.$$

所以当 $k\geqslant K$ 时，

$$\|A_k\|\leqslant N(1+\inf_{C\in P}\|f(x)-R(c,\ x)\|),$$

又由 δ 的定义，于 $k\geqslant K$ 时

$$\sum_{i=1}^n|a_{i_k}|\leqslant M=\frac{N}{\delta}(1+\inf_{C\in P}\|f(x)-R(c,\ x)\|).$$

从而当 $k\geqslant K$ 时，序列 $\{C_k\}$ 被限制在紧致集合

$$\left\{C\,\middle|\,\sum_{i=1}^n|a_i|\leqslant M,\ \ \sum_{j=1}^m|b_j|=1\right\}$$

之中．由熟知的 Bolzano-Weierstrass 定理，序列 $\{C_k\}$ 有聚点 $C^*\in P$ 存在.

B. Boehm 在文 [17] 中解决了最佳逼近有理分式的存在性问题.

定理 3(Boehm)　设 $f(x)$, $\varphi_1(x)$, $\cdots$, $\varphi_n(x)$, $\psi_1(x)$, $\cdots$, $\psi_m(x)$ 都是 $[0,\ 1]$ 上的连续函数，又设 $\psi_1(x)$, $\cdots$, $\psi_m(x)$ 于 $[0,\ 1]$ 上非零稠密．则 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上的最佳 Чебышев 逼近有理分式 $R(c^*,\ x)$ 存在.

证明．为讨论时叙述方便，记

$$d=\inf_{C\in P}\|f(x)-R(c,\ x)\|. \tag{2·6}$$

对于 P 中任一满足

$$\|R(c_k,\ x)-f(x)\|\leqslant d+1/k,\quad k=1,\ 2,\ \cdots$$

的序列 $\{C_k\}$，由引理 6 知其一定有聚点

$$C_0=(a_{10},\ \cdots,\ a_{n0},\ b_{10},\ \cdots,\ b_{m0})\in P.$$

下面我们来证明

$$\|R(c_0,\ x)-f(x)\|=d. \tag{2·7}$$

根据 d 的定义(2·6)，为证(2·7)式成立，只须证明

$$\|R(c_0,\ x)-f(x)\|\leqslant d. \tag{2·8}$$

因为 $\psi_1(x),\ \cdots,\ \psi_m(x)$ 于[0, 1]上非零稠密，所以使 $R(c_0,\ x)$ 的分母 $\sum_{j=1}^{m}b_{j0}\psi_j(x)\neq 0$ 的一切 x 点的集合 X_{c_0} 在[0, 1]内稠密. 当点 $x\in X_{c_0}$ 时，对每个 k，有

$$\begin{aligned}&|R(c_0,\ x)-f(x)|\\ &\quad\leqslant|R(c_0,\ x)-R(c_k,\ x)|+|R(c_k,\ x)-f(x)|\\ &\quad\leqslant|R(c_0,\ x)-R(c_k,\ x)|+d+1/k.\end{aligned} \tag{2·9}$$

由于 $\psi_j(x)\ (j=1,\ \cdots,\ m)$ 于 [0, 1] 上有界，所以在 [0, 1] 上一致地有

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{m}b_{jk}\psi_j(x)=\sum_{j=1}^{m}b_{j0}\psi_j(x),$$

其中 $b_{jk}\ (j=1,\ \cdots,\ m)$ 为 C_k 的后 m 个分量. 因为当 $x\in X_{c_0}$ 时，$\sum_{j=1}^{m}b_{j0}\psi_j(x)\neq 0$，从而

$$\lim_{k\to\infty}R(c_k,\ x)=R(c_0,\ x),\quad x\in X_{c_0}.$$

即
$$\lim_{k\to\infty}|R(c_k,\ x)-R(c_0,\ x)|=0,\quad x\in X_{c_0}.$$

因此当 $x\in X_{c_0}$ 时，由(2·9)可知

$$|R(c_0,\ x)-f(x)|\leqslant d,\quad x\in X_{c_0}. \tag{2·10}$$

以下只须证明上式对一切 $x_0\in[0, 1]-X_{c_0}$ 也成立. 对于这样的 x_0, 按定义 (2·3), 有

$$R(c_0, x)=\limsup_{x\in X_{c_0}\ x\to x_0} R(c, x).$$

所以有 X_{c_0} 中的点列 $\{x_\nu\}$ 存在, 使得

$$|R(c_0, x_0)-R(c_0, x_\nu)|\leqslant 1/\nu.$$

再按 $f(x)$ 的连续性, 有

$$|f(x_0)-f(x_\nu)|\leqslant 1/\nu.$$

从而

$$\begin{aligned}|R(c_0, x_0)-f(x_0)|&\leqslant|R(c_0, x_0)-R(c_0, x_\nu)|\\&\quad+|R(c_0, x_\nu)-f(x_\nu)|+|f(x_\nu)-f(x_0)|\\&\leqslant 1/\nu+d+1/\nu.\end{aligned}$$

因为上述不等式左端不依赖于 ν, 所以对 $x_0\in[0, 1]-X_{c_0}$ 有

$$|R(c_0, x_0)-f(x_0)|\leqslant d. \tag{2·11}$$

从而(2·8)、进而(2·7)得证.

对比(2·7)与(2·6)式, 即知

$$R(c_0, x)=R(c^*, x)$$

实为 $f(x)$ 的最佳 Чебышев 逼近有理分式. 定理 3 证完.

定理 3 中, 除非零稠密性条件外, 其它条件都是起码的条件. 这说明非零稠密性在保证最佳 Чебышев 有理逼近的存在性方面起了关键性的作用. 上节定理 1, 其实乃是定理 3 的直接推论. 事实上, 因为对于 $\psi_j(x)\equiv x^{j-1}$ $(j=1, \cdots, m)$ 来说, 它的任意线性组合都是一个 x 的 $m-1$ 次多项式. 由代数基本定理, 它的根只能有有限个. 因而当然满足非零稠密性了.

下面仅就当把(2·2)换成

$$P=\left\{C\in E_{n+m}\,\middle|\,D(B, x)>0,\ 0\leqslant x\leqslant 1;\ \sum_{j=1}^{m} b_j^2=1\right\} \tag{2·2$'$}$$

以后的(2·1)型有理分式逼近来建立最佳 Чебышев 逼近的特征和唯一性定理.

参数 $C=(A, B)\in P$ 称为 $C_1=(A_1, B_1)$ 和 $C_2=(A_2, B_2)$ 的一个凸组合,如果

$$\begin{aligned} A&=\sigma[\lambda A_1+(1-\lambda)A_2], \\ B&=\sigma[\lambda B_1+(1-\lambda)B_2], \end{aligned}\quad \lambda\geqslant 0, \qquad (2\cdot 12)$$

其中

$$\sigma^2=\sum_{j=1}^{m}[\lambda b_{1j}+(1-\lambda)b_{2j}]^2.$$

此时,常简记 $C=\lambda C_1+(1-\lambda)C_2$.

引理 7 在上述意义下,集合

$$P_\rho=\{C\mid C\in P,\ \|f(x)-R(c, x)\|\leqslant\rho\} \qquad (2\cdot 13)$$

是凸的.

证明 直接计算可得

$$\begin{aligned} &|f(x)-R(\lambda C_1+(1-\lambda)C_2, x)| \\ &=\frac{\left\{\begin{array}{l}|\sigma f(x)[\lambda D(B_1, x)+(1-\lambda)D(B_2, x)]\\ -\sigma[\lambda N(A_1, x)+(1-\lambda)N(A_2, x)]|\end{array}\right\}}{\sigma|D(\lambda B_1+(1-\lambda)B_2, x)|} \\ &\leqslant\frac{\lambda D(B_1, x)}{|D(\lambda B_1+(1-\lambda)B_2, x)|}\left|f(x)-\frac{N(A_1, x)}{D(B_1, x)}\right| \\ &\quad+\frac{(1-\lambda)D(B_2, x)}{|D(\lambda B_1+(1-\lambda)B_2, x)|}\left|f(x)-\frac{N(A_2, x)}{D(B_2, x)}\right|. \end{aligned}$$

引理证完.

设 X 是 $[0, 1]$ 的一个紧致子集,且

$$\rho=\max_{x\in X}|f(x)-R(c, x)|.$$

如果 $x_0\in X$, 使得

$$|f(x_0)-R(c, x_0)|=\rho,$$

则称 x_0 点为极值点.

假定 $x_1, x_2, \cdots, x_q$ 是 $R(c, x)$ 的极值点,且记

$$\sigma_i=\operatorname{sign}[f(x_i)-R(c,\ x_i)],\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ q.$$

若当C有一个小的改变量δC时，能得到一个比$R(c,\ x)$更好的逼近．则在极值点处应满足

$$\sigma_i\left[f(x_i)-\frac{N(A+\delta A,\ x_i)}{D(B+\delta B,\ x_i)}\right]<\sigma_i\left[f(x_i)-\frac{N(A,\ x_i)}{D(B,\ x_i)}\right]. \tag{2·14}$$

经整理，上式可简化为

$$\sigma_i[N(\delta A,\ x_i)-R(c,\ x_i)D(\delta B,\ x_i)]>0,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ q. \tag{2·15}$$

定理4 设X是紧致的．则为使$R(c,\ x)$是$f(x)$的最佳Чебышев逼近，必须且只须(2·15)对一切$\delta C\in P$是不相容的，其中x_i是$R(c,\ x)$的极值点．

证明 假定对一切$\delta C\in P$而言，不等式组(2·15)均不相容．如果$R(c_1,\ x)$是一个比$R(c,\ x)$的逼近程度为好的有理分式，则由引理7，所有凸组合$R(\lambda c+(1-\lambda)c_1,\ x)$的逼近程度优于(至少等于)$R(c,\ x)$．今设$R(c_2,\ x)$是这条线上于极值点处具有相同偏差且具有最小$\lambda$值$\lambda_2$的有理分式．于(2·14)中以$c_2$代替$c$并且以$\varepsilon(c_1-c)$代替$\delta C$，其中$\varepsilon$取得充分小，使$f(x_i)-R(C_2+\delta C,\ x_i)$和$f(x_i)-R(c_2,\ x_i)$同号．因而不等式(2·14)、进而(2·15)成立．从而(2·15)式是相容的．这与开始的假设条件相冲突．充分性证完．

假定对于某个$(\delta A,\ \delta B)$而言，不等式组(2·15)是成立的．因为(2·15)所涉及的函数是连续的，所以(2·15)可以在一个比极值点更大的范围内成立．特别地，存在一个开集X_0，使得$x_i\in X_0$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ p$，并且

$$\sigma_i[N(\delta A,\ x)-R(c,\ x)D(\delta B,\ x)]\geqslant\delta>0,\quad x\in X_0.$$

考察$R(C+\lambda\delta C,\ x)$．显然存在一个很小的λ_1值，使由

$0<\lambda<\lambda_1$ 可推出当 $x\in X_c$ 时，

$$|f(x)-R(C+\lambda\delta C,\ x)|<\|f(x)-R(c,\ x)\|.$$

另外，有 $\lambda_2>0$ 存在，使当 $\lambda<\lambda_2$ 时，对所有 $x\in X_c$，有

$$\operatorname{sign}[f(x)-R(c,\ x)]=\operatorname{sign}[f(x)-R(C+\lambda\delta C,\ x)]$$
$$=\sigma(x),$$

其中 $\sigma(x)$ 就是如上式定义的符号函数. 另外由于 $D(B,\ x)$ 于 $[0,\ 1]$ 上是正的，所以有 $\lambda_3>0$ 存在，使当 $0<\lambda<\lambda_3$ 时，$D(B+\lambda\delta B,\ x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上也是正的.

现取 $\lambda_0=\min(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)$. 则当 $\lambda<\lambda_0$ 时，我们有

$$\|f(x)-R(C+\lambda\delta C,\ x)\|$$
$$=\sup_{x\in X_c}\sigma(x)[f(x)-R(C+\lambda\delta C,\ x)].$$

从而对于 $x\in X_c$，

$$\sigma(x)[f(x)-R(C+\lambda\delta C,\ x)]-\sigma(x)[f(x)-R(c,\ x)]$$
$$=-\frac{\sigma(x)}{D(B+\lambda\delta B,\ x)}[\lambda N(\delta A,\ x)-\lambda R(c,\ x)D(\delta B,\ x)]$$
$$<\frac{\sigma\lambda}{D(B+\lambda\delta B,\ x)}. \tag{2·16}$$

因此对于 $\lambda<\lambda_0$，上述量是负的. 然而，这个量为负表明 $R(C+\lambda\delta C,\ x)$ 的偏差比 $R(c,\ x)$ 的偏差为小. 这说明 $R(C+\lambda\delta C,\ x)$ 是一个比 $R(c,\ x)$ 还要好的逼近式. 故 $R(c,\ x)$ 当(2·15)相容时不能是最佳有理逼近分式. 注意，当极值点的个数 p 是无穷多个时，以上证明同样成立. 定理证完.

应该指出的是，当 X 不紧致时，以上特征定理就不见得成立. 其实，此时对于一个最佳逼近有理分式来说，它很可能根本没有极值点. 然而可以这样来处理 X 不紧致的情况：设 $\overline{X}$ 是 X 的闭包，则 $\overline{X}$ 当然是紧致的. 因为所涉及的各个函数都是连续的，所以可以把它们连续地扩张到 $\overline{X}$. 不难指出，

有理分式 $R(c, x)$ 是 $f(x)$ 于 X 上的最佳逼近，必须且只须它是 $f(x)$ 于 $\overline{X}$ 上的最佳逼近. 因而可给出 X 不紧致时的特征定理来.

定义 8 $f(x)$ 的最佳有理逼近分式 $R(c^*, x)$ 的极值点的一个子集

$$S=\{x_i | i=1, 2, \cdots, p\}$$

称为一个临界点集，如果 $R(c^*, x)$ 是 $f(x)$ 在 S 上的最佳逼近有理分式，但它不是 $f(x)$ 在 S 的任意真子集上的最佳逼近有理分式.

以上定义表明，如果 S 是一个临界点集，则于其中任意去掉一个点后，都可以找到 $f(x)$ 的一个新的有理逼近式，它的偏差比 $R(c^*, x)$ 的偏差要小.

由定理 4 可知当 x_i 是极值点时，线性不等式组 (2·15) 是不相容的. 同样地，相应于任一临界点集的 (2·15) 的那部分不等式组也必不相容. 否则 $R(c^*, x)$ 就不是 $f(x)$ 在这个极值点的子集上的最佳逼近有理分式.

W. B. Carver [21] 给出了线性不等式组的既约不相容概念: 如果

$$\sum_{i=1}^{p} a_i g_{ij} > a_j, \quad j=1, 2, \cdots, q \tag{2·17}$$

是不相容的，但是它的每个真子系是相容的.

引理 8 不等式组是既约不相容的，必须且只须如下两个条件被满足:

(i) q 个向量

$$g_j=(g_{1j}, g_{2j}, \cdots, g_{pj}), \ j=1, 2, \cdots, q$$

中的任意 $q-1$ 个都是线性无关的;

(ii) 存在 $\lambda_j>0 (j=1, 2, \cdots, q)$，满足

$$\sum_{j=1}^{q}\lambda_j=1, \qquad \sum_{j=1}^{q}\lambda_j\alpha_j\geqslant 0$$

且

$$\sum_{j=1}^{q}\lambda_j g_j=0. \tag{2·18}$$

有关引理 8 的证明，可参阅 [34] 的定理5. 此处不再详述.

对于我们这里的情况来说，α_j 全为 0 且上述引理的条件 (ii) 归结为 $\lambda_j>0$ 和 (2·18). 现在令

$$\begin{aligned} g(c,\ x)=\sigma(x)(&\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \cdots,\ \varphi_n(x),\\ &-R(c,\ x)\psi_1(x),\ -R(c,\ x)\psi_2(x),\ \cdots,\\ &-R(c,\ x)\psi_m(x)). \end{aligned} \tag{2·19}$$

则对应一个最佳逼近有理分式 $R(c^*,\ x)$ 的 (2·15) 可写成内积的形式

$$\delta C\cdot g(c^*,\ x)>0,\ \ i=1,\ 2,\ \cdots,\ q. \tag{2·20}$$

定义 9 设 $P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_r$ 是 r 个 s 维向量，称

$$\mathscr{P}=\left\{P\in E_s\,\middle|\,P=\sum_{i=1}^{r}u_iP_i,\ u_i\geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{r}u_i=1\right\} \tag{2·21}$$

为集合 $\{P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_r\}$ 的凸壳.

[34]还给出了不等式组和凸壳的关系. 利用它可证明下述推论.

推论 1 设 X 紧致，则为使 $R(c^*,\ x)$ 是 $f(x)$ 的最佳逼近有理分式，必须且只须零向量落在向量集合

$$\{g(c^*,\ x_i)\,|\,x_i\text{ 是极值点}\}$$

的凸壳中.

推论 2 一个临界点集最多包含 $n+m$ 个点.

证明 不等式组 (2·20) 必为不相容的并且 $q-1$ 个向量 $g(c,\ x_i)$ 是线性无关的. 因为这些向量是 $n+m$ 维的，而 E_{n+m}

中任意 $n+m+1$ 个向量组成的向量组必然线性相关，所以 $q\leqslant n+m+1$. 然而在标准化时，C 中一个参数可以任意取定，所以 $g(c, x)$ 的实际长度是 $n+m-1$.

利用经典的 Caratheodory 定理(设 S 是 E_n 中的一个向量组，$H(S)$ 是 S 的凸壳. 则 $H(S)$ 中的任一点落在 S 的最多由 $n+1$ 个点组成的某子集的凸壳中)，从推论 1 可以得到本推论.

定理 5 设 X 紧致，且 $R(c^*, x)$ 是 $f(x)$ 于 X 上的一个最佳逼近有理分式. 如果向量集合 $\{g(c^*, x_i)|i=1, 2, \cdots, n+m-1;\ x_i\neq x_j\}$ 是线性无关的，则 $R(c^*, x)$ 是唯一确定的.

证明 设 $\{x_i|i=1, 2, \cdots, p\}$ 是最佳逼近 $R(c^*, x)$ 的一个临界点集. 由于集合

$$\{g(c^*, x_i)\,|\,i=1, 2, \cdots, n+m-1\}$$

是线性无关的(引理 8，其中 $p=n+m$)，从 (2·20) 可知存在 $\lambda_i>0$，使得

$$\sum_{i=1}^{n+m}\lambda_i g(c^*, x_i)=0.$$

注意到 $C^*\cdot g(c^*, x_i)=0$，因而 C^* 与 E_{n+m} 中由 $\{g(c^*, x_i)\}$ 所支架起来的 $n+m-1$ 维子空间是直交的. 若 $C_1=(A, B^{\perp})$，此处 $B^{\perp}\cdot B^*=0$，则对某个 i，有 $C_1\cdot g(c^*, x_i)\neq 0$，并且

$$\sum_{i=1}^{n+m}\lambda_i(C_1\cdot g(c^*, x_i))=0.$$

因此对某个 i，$C_1\cdot g(c^*, x_i)>0$ 并且对这种形式的 C，

$$\alpha=\min_{B^{\perp}\cdot B^*=0}\max_i C\cdot g(c^*, x_i)>0. \qquad (2\cdot 22)$$

其次，如果 $C_2=(A^*+A, B^*)$，则按同样的道理并注意到 $C_2\cdot g(c^*, x_i)=N(A, x_i)$，于是有

$$\max_i \sigma_i N(A, x_i)\geqslant\beta\|N(A, x)\|, \qquad (2\cdot 23)$$

此处 $\beta>0$.

今考虑任一其它的逼近式 $R(c, x)$. 我们有

$$\sigma_i[f(x_i)-R(c, x_i)]$$
$$=\sigma_i[f(x_i)-R(c^*, x_i)]+\sigma_i[R(c^*, x_i)-R(c, x_i)].$$

因而当记 $d^*=\|f(x)-R(c^*, x)\|$ 时, 有

$$\|f(x)-R(c, x)\|$$
$$\geqslant d^*+\max_i \sigma_i[R(c^*, x_i)-R(c, x_i)]$$
$$\geqslant d^*+\frac{\max_i \sigma_i[D(B, x_i)R(c^*, x_i)-N(A, x_i)]}{\|D(B, x)\|}. \quad (2\cdot 24)$$

引进记号 $M=\max_B \|D(B, x)\|$, $\cos\theta=B\cdot B^*$.

首先考虑 $\theta\neq 0$ 的情况. 我们写

$$B=\sin\theta\cdot B^{\perp}+\cos\theta\cdot B^*$$

并设 $\sin\theta>0$, 则有

$$(-A, B)\cdot g(c^*, x_i)$$
$$=\sin\theta\left[-N\left(\frac{A-\cos\theta A^*}{\sin\theta}, x_i\right)+R(c^*, x_i)\,D(B^{\perp}, x_i)\right].$$

于是由 (2·22) 与 (2·24)

$$\|f(x)-R(c, x)\|$$
$$\geqslant d^*+\frac{\sin\theta}{M}\max_i \sigma_i[(-A, B)\cdot g(c^*, x_i)]$$
$$\geqslant d^*+\frac{\alpha\sin\theta}{M}.$$

所以如果 $\sin\theta>0$, 则 $R(c^*, x)$ 是一个比起 $R(c, x)$ 来为更好的有理逼近.

当 $\sin\theta<0$ 时, 类似的分析给出项 $-\alpha\sin\theta/M$.

当 $\theta=0$ 时, 由 (2·24) 式

$$\|f(x)-R(c, x)\|$$
$$\geqslant d^*+\frac{1}{M}\max_i \sigma_i[N(A^*, x_i)-N(A, x_i)].$$

由(2·23)推知

$$\|f(x)-R(c, x)\|\geqslant d^*+\frac{\beta}{M}\|N(A, x)-N(A^*, x)\|.$$

因而只要 $A\neq A^*$, 则 $R(c^*, x)$ 是一个比起 $R(c, x)$ 为更好的逼近分式. 定理证完.

事实上, 我们已经建立了某些比唯一性更强的结果. 即所谓强唯一性定理.

定理6 设 X 紧致且 $R(c^*, x)$ 是 $f(x)$ 于 X 上的最佳逼近分式. 如果每个向量集合

$$\{g(c^*, x_i)\,|\,i=1, 2, \cdots, n+m-1, x_i\neq x_j\}$$

是线性无关的, 则对任意有理分式 $R(c, x)$ 恒有

$$\|f(x)-R(c, x)\|\geqslant\|f(x)-R(c^*, x)\| +\begin{cases} a\sin\theta, & \text{当 } \theta\neq 0, \\ b\|N(A, x)-N(A^*, x)\|, & \text{当 } \theta=0, \end{cases} \tag{2·25}$$

其中 $\cos\theta=B\cdot B^*$, $b>0$ 且 $a\sin\theta>0$.

以下, 我们将对最佳逼近有理分式的特征性质作另一种类型的叙述.

定义10 连续函数空间 $C[0, 1]$ 的 n 维子空间 $\mathscr{L}$ 称为 Haar 子空间, 如果对于 $[0, 1]$ 中的任意 n 个互异的点 x_1, x_2, $\cdots$, x_n, 均有

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \cdots & \varphi_1(x_n) \\ \varphi_2(x_1) & \varphi_2(x_2) & \cdots & \varphi_2(x_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_n(x_1) & \varphi_n(x_2) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}\neq 0, \tag{2·26}$$

其中 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\cdots$, $\varphi_n(x)$ 是 $\mathscr{L}$ 的一组基底函数.

只须根据齐线性代数方程组的理论，则不难证明，$\mathscr{L}$ 是一个 Haar 子空间，若且仅若 $\{\varphi_i(x)\}$ 是一个 Чебышев 函数组. 即若且仅若系数不全为零的“多项式”

$$a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)+\cdots+a_n\varphi_n(x)$$

在 $[0, 1]$ 上至多只能有 $n-1$ 个零点.

定义 11 对于任一子空间 μ, 记

$\eta(\mu)=\mu$ 的 Haar 子空间的最大维数;

$\delta(\mu)=\mu$ 的维数;

$\nu(\mu)=1+\mu$ 的元素的最大变号数;

$\zeta(\mu)=1+\mu$ 中非零元素的最大零点数;

$\zeta^*(\mu)=1+\mu$ 中非零元素的最大零点数，其中二重根计算 2 次.

对于任意给定的子空间来说，有

$$\zeta^*\geqslant\zeta\geqslant\nu\geqslant\delta\geqslant\eta. \tag{2·27}$$

并且如果 $\eta=\delta$ 或 $\zeta=\delta$, 则以上各量均相等.

现在引进两个子空间

$$\mathfrak{N}=\{N(A, x)\},$$

$$\mathfrak{D}=\{D(B, x)\}.$$

我们有(见 E. W. Cheney [22])

定理 7 若 $f(x)-R(c^*, x)$ 于 $[0, 1]$ 上交错 $\nu(\mathfrak{N}+R(c^*, x)\mathfrak{D})$ 次，则 $R(c^*, x)$ 是 $f(x)$ 的一个最佳逼近有理分式. 若 $R(c^*, x)$ 是 $f(x)$ 的一个最佳逼近有理分式，则 $f(x)-R(c^*, x)$ 于 $[0, 1]$ 上交错 $\eta(\mathfrak{N}+R(c^*, x)\mathfrak{D})$ 次.

证明 若 $f(x)-R(c^*, x)$ 于 $[0, 1]$ 上交错 ν 次，且

$$\|f(x)-R(c, x)\|<\|f(x)-R(c^*, x)\|.$$

则 $R(c, x)-R(c^*, x)$ 至少有 ν 个零点. 因为 $D(B, x)>0$, 从而推知

$$N(A, x)-R(c^*, x)D(B, x)$$

有 ν 个零点. 此与 ν 的定义相矛盾.

假定 $f(x)-R(c^*,x)$ 没有 η 次交错. 设 $\{x_i|i=1,2,\cdots,p\}$ 分 $[0, 1]$ 区间为一些子区间, 使得在所有子区间上 $f(x)-R(c^*, x)$ 都以固定的符号取到 $\|f(x)-R(c^*, x)\|$. 现在 $p<\eta$ 且因此有一个 $R(\delta C, x)$ 存在, 使

$$N(\delta A, x_i)-R(c^*, x_i)D(\delta B, x_i)=0, \quad i=1, 2, \cdots, p$$

且
$$\operatorname{sign}[f(x)-R(c^*, x)] = -\operatorname{sign}[R(c^*, x)-R(\delta C, x)].$$

这推出 (2·15) 是相容的, 因此由定理 4 知 $R(c^*, x)$ 不是一个最佳逼近有理分式. 定理证完.

下面推论 3 是有关唯一性定理的一种陈述方式, 它是 E. W. Cheney 给出的([22]).

推论 3 设 $R(c^*, x)$ 是 $f(x)$ 的最佳逼近有理分式. 若

$$\delta(\mathfrak{N}+R(c^*, x)\mathfrak{D})=\eta(\mathfrak{N}+R(c^*, x)\mathfrak{D}),$$

或者等价地, 若 $\mathfrak{N}+R(c^*,x)\mathfrak{D}$ 是一 Haar 子空间, 则 $R(c^*, x)$ 是唯一的.

该推论的证明思路和熟知的唯一性定理的证法是类似的 (见定理 2 的证明).

有人也许会以为当 $\mathfrak{N}$ 和 $\mathfrak{D}$ 是 Haar 子空间时, $\mathfrak{N}+R(c,x)\mathfrak{D}$ 一定也是 Haar 子空间. 今举反例如下: 取 $\mathfrak{N}=[1, x^2]$, $\mathfrak{D}=[1, x]$, 区间为 $[0, 3]$, 则设 $R(c, x)=(1+x^2)/(1+x)$. 因而空间 $\mathfrak{N}+R(c, x)\mathfrak{D}=[1, x^2, (1+x^2)/(1+x), (x+x^3)/(1+x)]$. 由于 $(x+x^3)/(1+x)=1+x^2-(1+x^2)/(1+x)$, 所以 $\mathfrak{N}+R(c, x)\mathfrak{D}$ 的维数仅仅为 3. 如果 $\mathfrak{N}+R(c, x)\mathfrak{D}$ 是一 Haar 子空间, 则它于 $[0, 3]$ 上理应最多有 2 个零点. 可是函数

$$\Omega(x)=6+x^2-6\,\frac{1+x^2}{1+x}=\frac{x(x-2)(x-3)}{1+x}$$

于 $[0, 3]$ 上却有 3 个零点.

§3 具有约束的有理逼近*

本节专就满足某些约束条件的有理分式类的逼近问题进行讨论. 特别地, 此处仅就满足插值约束的有理逼近的存在性定理、特征定理和唯一性定理等作一番简要的介绍.

为行文方便, 本节仅就 $[a, b]$ 为有界闭区间立论. 设 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的连续函数, $S(x)\in C^s[a, b]$ 且 $S(x)$ 于 $[a, b]$ 上恒不为零. 考虑有理分式

$$Q(x)=S(x)\,\frac{q_0x^n+q_1x^{n-1}+\cdots+q_n}{p_0x^m+p_1x^{m-1}+\cdots+p_m},\qquad(3\cdot1)$$

其中 $p_0, p_1, \cdots, p_m; q_0, q_1, \cdots, q_n$ 为实参数.

给定 $[a, b]$ 上 l 个点

$$a\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_l\leqslant b$$

和相应的一组实数

$$\beta_j^{(i_j)}\quad(j=1, 2, \cdots, l;\ i_j=0, 1, \cdots, k_j-1),$$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_l\leqslant s+1$, $k=k_1+k_2+\cdots+k_l\leqslant m+n$.

形如 (3·1) 式且满足约束条件

$$Q^{(i_j)}(t_j)=\beta_j^{(i_j)}\quad(j=1, 2, \cdots, l;\ i_j=0, \cdots, k_j-1)\quad(3\cdot2)$$

的有理分式 $Q(x)$ 所构成的类, 我们记之为 $R_m^n(S)$.

对于给定的 $f(x)\in C[a, b]$, 所谓在类 $R_m^n(S)$ 上的最佳一致逼近问题, 乃是研究如下极值问题的解的存在性以及特征属性的问题:

---

* 可参见参考文献 [5].

$$H_Q=\|f(x)-Q(x)\|=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-Q(x)|$$

$$=\inf_{T\in R_m^n(S)}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-T(x)|. \qquad (3\cdot3)$$

为叙述方便起见，记

$$I=\{t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_l\},$$

$$\omega(x)=(x-t_1)^{k_1}\cdots(x-t_l)^{k_l}.$$

若 $I\equiv\phi$(空集)，则规定 $\omega(x)\equiv1$.

引理9 对于 $R_m^n(S)$ 中的任意两个有理分式

$$P_1(x)=S(x)B_1(x)/A_1(x),\ P_2(x)=S(x)B_2(x)/A_2(x),$$

必有某多项式 $K(x)\in H_{m+n-k}$ 存在，使得

$$P_2(x)-P_1(x)\equiv S(x)\frac{\omega(x)K(x)}{A_1(x)A_2(x)}. \qquad (3\cdot4)$$

证明 因为

$$\eta(x)\equiv P_2(x)-P_1(x)$$

$$\equiv S(x)\frac{A_1(x)B_2(x)-A_2(x)B_1(x)}{A_1(x)A_2(x)}\equiv S(x)\frac{C(x)}{D(x)}, \qquad (3\cdot5)$$

所以为证引理，只须证明 $C(x)$ 含有因子 $\omega(x)$，也即只须往证 $C(x)$ 含有各个 $(x-t_j)^{k_j}$ 因子.

约束条件(3·2)指明

$$\eta(t_j)=P_2(t_j)-P_1(t_j)=0.$$

因而由(3·5)式即知有多项式 $C_1(x)\in H_{m+n-1}$，使

$$C(x)=(x-t_j)C_1(x).$$

今假定业已证明

$$C(x)=(x-t_j)^{\lambda}\cdot C_{\lambda}(x), \qquad (3\cdot6)$$

其中 $C_{\lambda}(x)\in H_{m+n-\lambda}$.

以下证，只要 $\lambda\leqslant k_j-1$，则 $C_{\lambda}(x)$ 一定还继续可被 $x-t_j$

所整除. 即从 $C_\lambda(x)$ 中仍可析出因子 $x-t_j$.

假定 $\lambda\leqslant k_j-1$. 根据 Leibnitz 公式

$$\eta^{(\lambda)}(x)=\sum_{\rho=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{\rho}\left(\frac{S(x)}{D(x)}\right)^{(\rho)}\sum_{r=0}^{\lambda-\rho}\binom{\lambda-\rho}{r}\times[(x-t_j)^\lambda]^{(r)}C_\lambda^{(\lambda-\rho-r)}(x),$$

由约束条件(3·2)知 $\eta^{(\lambda)}(t_j)=0$. 但上述 $\eta^{(\lambda)}(x)$ 表达式中,只有 $\rho=0$ 且 $r=\lambda$ 那项不显含 $x-t_j$ 因子. 而该项为

$$\lambda!C_\lambda(x)S(x)/D(x).$$

因此
$$C_\lambda(t_j)=0,$$

即从 $C_\lambda(x)$ 中还可以析出因子 $x-t_j$ 来. 总之, 有 $C_{k_j}(x)\in H_{m+n-k_j}$, 使

$$C(x)=(x-t_j)^{k_j}C_{k_j}(x).$$

从而引理得证.

定义 12 我们说函数 $u(x)$ 在点集

$$x_1<x_2<\cdots<x_r$$

上按 $\mu(x)$ 正负交错, 如果

$$\operatorname{sign}\{\mu(x_j)u(x_j)\}=\lambda\cdot(-1)^{j-1}\quad(j=1,\ \cdots,\ r),\qquad(3\cdot7)$$

其中 $\lambda=+1$ 或 -1.

按某确定函数交错的概念是作者与梁学章在研究多元函数的 Чебышев 理论时引入的[10]. 看来这个概念对于处理具有某种约束的逼近问题是较有效的.

定理 8 设

$$A(x)=a_0x^{m-\mu}+\cdots+a_{m-\mu},\ B(x)=b_0x^{n-\nu}+\cdots+b_{n-\nu}$$

为两不可约多项式, 其中 $0\leqslant\mu\leqslant m$, $0\leqslant\nu\leqslant n$, $\mu+\nu\leqslant m+n-k+2$, $a_0\neq0$. 又设

$$R(x)=S(x)B(x)/A(x)\in R_m^n(S)$$

于 $[a,\ b]$ 上有穷, 且 $f(x)-R(x)$ 在 $[a,\ b]-I$ 中的点列

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_N$$

上以按 $\omega(x)$ 正负交错的符号取异于零的值(不妨设各 $\lambda_j > 0$)

$$\lambda_1, \ -\lambda_2, \ \cdots, \ (-1)^{N-1}\lambda_N,$$

其中 $N = m+n-k-d+2$, $d = \min(\mu, \ \nu)$. 则对一切 $Q(x) \in R_m^n(S)$,有

$$H_Q \geqslant \min\{\lambda_1, \ \lambda_2, \ \cdots, \ \lambda_N\}. \tag{3·8}$$

当 $R(x) \equiv 0$, 且 $N = n-k+2 (d=m)$ 时,(3·8) 式仍然成立.

证明 用反证法. 设有某

$$Q(x) = S(x)\frac{\overline{B}(x)}{\overline{A}(x)} \in R_m^n(S)$$

使(3·8)式不成立,即

$$H_Q < \min\{\lambda_1, \ \lambda_2, \ \cdots, \ \lambda_N\}. \tag{3·9}$$

作差函数并根据引理

$$\begin{aligned}\eta(x) &= Q(x) - R(x)\\ &= S(x)\omega(x)\frac{K(x)}{A(x)\overline{A}(x)}\\ &= (f(x) - R(x)) - (f(x) - Q(x)).\end{aligned} \tag{3·10}$$

由 $\omega(x)$ 交错的定义和 (3·9)、(3·10) 两式, 可知 $K(x)/(A(x)\overline{A}(x))$ 在点列 $x_1 < x_2 < \cdots < x_N$ 上以正负交错的符号取异于零的值. 于是根据连续函数的中间值定理, $K(x)$ 在开区间 $(a, \ b)$ 内至少有 $N-1 = m+n-k-d+1$ 个零点. 然而 $K(x)$ 的次数不超过 $m+n-k-d$, 因而

$$K(x) \equiv 0.$$

亦即 $Q(x) \equiv R(x)$,此与(3·9)式矛盾. 从而(3·8)式得证.

当 $R(x) \equiv 0$ 时, $B(x) \equiv 0$. 而且引理已指出 $Q(x) \equiv Q(x) - R(x)$ 已有 k 个零点(重数计算在内). 剩下其它证明步骤同上即可证明(3·8)式仍然成立. 定理 8 证完.

定理 8 乃是误差下界估计的 Vallee-Poussin 定理在具有约束情况下的推广.

下面给出对于任意给定的 $f(x)\in C[a, b]$, $R_m^n(S)$ 类中最佳逼近有理分式的存在性定理.

定理 9 对于任意给定的 $f(x)\in C[a, b]$, 存在有 $P(x)\in R_m^n(S)$, 使得

$$H_P=\inf_{Q\in R_m^n(S)} H_Q. \tag{3·11}$$

证明 设 $H\geqslant 0$ 是所有 H_Q 的下确界. 于是根据下确界的定义, 有无穷有理分式序列

$$\begin{aligned}Q_j(x)&=S(x)\frac{q_{j_0}x^n+\cdots+q_{j_n}}{p_{j_0}x^m+\cdots+p_{j_m}}\\&\equiv S(x)\frac{q_j(x)}{p_j(x)}\in R_m^n(S),\ j=1,\ 2,\ \cdots,\end{aligned} \tag{3·12}$$

使 $H_{Q_j}\to H\ (j\to\infty)$.

仿照文献[1]中存在性定理的证明, 可以证明在 $\{Q_j(x)\}_1^\infty$ 中可选出某子序列(不妨设是它自己), 使

$$\lim_{j\to\infty} p_{j_i}=a_i,\ \lim_{j\to\infty} q_{j_k}=b_k,\quad i=0,\ \cdots,\ m;\ k=0,\ \cdots,\ n. \tag{3·13}$$

按照(3·13)式给出的极限值, 构造一个有理分式

$$P(x)=S(x)\ \frac{b_0x^n+\cdots+b_n}{a_0x^m+\cdots+a_m}\equiv S(x)\ \frac{B(x)}{A(x)}. \tag{3·14}$$

今先证 $P(x)\in R_m^n(S)$. 为此先证 $P(x)$ 在整个 $[a, b]$ 上处处有限. 事实上, 因为 $P(x)$ 只可能在其分母的零点处变为无穷. 也即除有可能在有限个点处出问题外, 在其它点 $\tilde{x}$ 处, 总有

$$\lim_{j\to\infty} Q_j(\tilde{x})=P(\tilde{x}).$$

从而

$$|P(\tilde{x})|\leqslant|f(\tilde{x})|+|f(\tilde{x})-Q_j(\tilde{x})|+|Q_j(\tilde{x})-P(\tilde{x})|$$
$$\leqslant\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|+H_{Q_j}+\varepsilon_j.$$

所以除有限个点处外，总有

$$|P(x)|\leqslant M=\|f\|+K.$$

因 $P(x)$ 是有理分式，进而 $P(x)$ 在整个 $[a, b]$ 上处处有限．既然如此，只有下列两种可能:

1°　$P(x)$ 的分母 $A(x)$ 在 $[a, b]$ 上无零点;

2°　$P(x)$ 的分母 $A(x)$ 在 $[a, b]$ 上有零点，但这些零点也同时是 $B(x)$ 的零点（且重数相同）.

显然，当 $P(x)$ 属于情况 1° 时，在 $[a, b]$ 上一致地有

$$\lim_{j\to\infty}Q_j(x)=P(x),\quad a\leqslant x\leqslant b. \tag{3·15}$$

以下证明 (3·15) 式对于情况 2° 也同样成立．假定此时 $A(x)$, $B(x)$ 的最大公因子为多项式 $E(x)$，则

$$P(x)=S(x)\frac{B(x)}{A(x)}\equiv S(x)\frac{E(x)D(x)}{E(x)C(x)}\equiv S(x)\frac{D(x)}{C(x)}.$$

因为　$$Q_j(x)-P(x)=S(x)\frac{q_j(x)C(x)-p_j(x)D(x)}{p_j(x)C(x)},$$

所以为证(3·15)式，只须证明在 $[a, b]$ 上一致地有

$$\lim_{j\to\infty}u_j(x)\equiv\lim_{j\to\infty}[q_j(x)C(x)-p_j(x)D(x)]$$
$$=u(x)\equiv0. \tag{3·16}$$

事实上，由(3·13)式可知在 $[a, b]$ 上一致地有

$$\lim_{j\to\infty}E(x)u_j(x)=E(x)u(x)\equiv0. \tag{3·17}$$

上式说明 $u(x)$ 只可能在 $E(x)$ 的零点处不为零．而 $E(x)$ 只有有限个孤立零点，根据 $u(x)$ 的连续性，故必有 $u(x)\equiv0$. 所以对于情况 2°, (3·15)式亦成立.

由一致收敛的函数序列的微分性质，在 $[a, b]$ 上一致地有

$$\lim_{j\to\infty} Q_j^{(\nu)}(x) = P^{(\nu)}(x), \quad \nu = 0, 1, \cdots. \qquad (3\cdot 18)$$

因为 $Q_j(x) \in R_m^n(S)$，由 (3·18) 式即知 $P(x)$ 也满足约束条件(3·2)，即 $P(x) \in R_m^n(S)$.

今于不等式

$$\|f-P\| \leqslant \|f-Q_j\| + \|P-Q_j\|$$

两边令 $j\to\infty$，得到

$$\|f-P\| \leqslant H.$$

即 $H_P \leqslant H$. 但显然 $H_P \geqslant H$，因此

$$H_P = H.$$

定理 9 证完.

下面我们转向 Чебышев 定理的叙述.

$R_m^n(S)$ 中的任一有理分式可写成

$$P(x) = S(x)\frac{b_0x^{n-\nu} + \cdots + b_{n-\nu}}{a_0x^{m-\mu} + \cdots + a_{m-\mu}} = S(x)\frac{B(x)}{A(x)},$$

其中 $0 \leqslant \mu \leqslant m$，$0 \leqslant \nu \leqslant n$，$\mu+\nu \leqslant m+n-k+2$，$a_0 \neq 0$ 且 $A(x)$，$B(x)$ 互质.

凡满足 $|f(x)-P(x)| = \|f(x)-P(x)\|$

的点 $x(a \leqslant x \leqslant b)$ 均称为 $P(x)$ 的偏离点，如果偏离点 $x \in I$，则称之为中性偏离点. 若偏离点 x_0 不是中性偏离点，且 $f(x) \,\overline{\in}\, R_m^n(S)$，则如下两式

$$\omega(x_0)[f(x_0)-P(x_0)] > 0, \ \omega(x_0)[f(x_0)-P(x_0)] < 0 \qquad (3\cdot 19)$$

必有且仅有一个成立. 我们依次称满足 (3·19) 式中前、后两式的 x_0 点为 $P(x)$ 的按 $\omega(x)$ 的正、负偏离点. 特别地，如果点组 $x_1 < x_2 < \cdots < x_N$ 满足

$$\operatorname{sign}\{\omega(x_j)[f(x_j)-P(x_j)]\}$$
$$=-\operatorname{sign}\{\omega(x_{j+1})[f(x_{j+1})-P(x_{j+1})]\}, \quad (3\cdot20)$$
$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1,$$

则称它们是 $P(x)$ 的一个按 $\omega(x)$ 交错的偏离点组，简称按 $\omega(x)$ 的交错点组.

命题 1 若 $P(x)\in R_m^n(S)$ 有中性偏离点，则 $P(x)$ 为 $f(x)$ 在类 $R_m^n(S)$ 中的最佳逼近有理分式.

证明 若 x_0 为 $P(x)$ 的中性偏离点，则 $x_0\in I$. 于是由偏离点的定义和约束条件 (3·2) 可知对任何 $Q(x)\in R_m^n(S)$，恒有

$$H_P=\|f(x)-P(x)\|=|f(x_0)-P(x_0)|,$$
$$H_Q=\|f(x)-Q(x)\|\geqslant|f(x_0)-Q(x_0)|$$
$$=|f(x_0)-P(x_0)|.$$

从而
$$H_P\leqslant H_Q$$
对一切 $Q(x)\in R_m^n(S)$ 成立. 命题得证.

描述最佳逼近有理分式特征属性的是下述定理 10.

定理 10 $P(x)\in R_m^n(S)$ 是 $f(x)$ 的最佳逼近有理分式，必须且只须满足下列两条件之一：

1° $P(x)$ 有中性偏离点存在；

2° $P(x)$ 有一个点数不少于

$$m+n-k-d+2 \quad (d=\min(\mu,\ \nu))$$

的按 $\omega(x)$ 交错的偏离点组存在.

并且在 2° 成立的前提下，$P(x)$ 还是唯一的最佳逼近有理分式.

证明 条件 1° 的充分性是前述命题的结论.

为证条件 2° 的充分性，设 $N\geqslant m+n-k-d+2$. 于定理 8 中取

$$|\lambda_j| = H_P,$$

则可知对任何 $Q(x)\in R_m^n(S)$，均有

$$H_Q \geqslant H_P.$$

从而 2° 的充分性得证.

下面证必要性. 设 $P(x)$ 是 $R_m^n(S)$ 中的最佳逼近有理分式. 显然，为证必要性，只须在 $P(x)$ 无中性偏离点的前提下来证明 2° 成立即可.

用反证法. 设 $P(x)$ 任意一个按 $\omega(x)$ 交错的偏离点组为

$$a\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_{N'}\leqslant b,$$

其中 $N'\leqslant m+n-k-d+1$. 今把 $[a, b]$ 划分为

$$[a, \xi_1], [\xi_1, \xi_2], \cdots, [\xi_{N'-1}, b], \tag{3·21}$$

使得它们中的每一个含且仅含上述偏离点组中的某一个：

$$a\leqslant x_1<\xi_1, \cdots, \xi_{j-1}<x_j<\xi_j, \cdots, \xi_{N'-1}<x_{N'}\leqslant b.$$

显然，存在 $\varepsilon_0>0$，使得在子区间 (3·21) 上轮流满足下述两式之一：

$$\begin{aligned} -H_P\leqslant f(x)-P(x)<H_P-\varepsilon_0, \\ -H_P+\varepsilon_0<f(x)-P(x)\leqslant H_P. \end{aligned} \tag{3·22}$$

往下，我们将实际作出 $Q(x)\in R_m^n(S)$，使得

$$H_Q<H_P. \tag{3·23}$$

因为对任何 $Q(x)\in R_m^n(S)$，我们均有

$$f(x)-Q(x)=(f(x)-P(x))+(P(x)-Q(x)). \tag{3·24}$$

所以只要能够选取 $Q(x)\in R_m^n(S)$，使得一方面 $\|P(x)-Q(x)\|$ 充分小，另一方面

$$\begin{aligned} &-\operatorname{sign}\{\omega(x_j)[P(x_j)-Q(x_j)]\} \\ &\quad=\operatorname{sign}\{\omega(x_j)[f(x_j)-P(x_j)]\}, \quad j=1, 2, \cdots, N'. \end{aligned} \tag{3·25}$$

则就可以保证(3·23)式成立. 若记

$$\Phi(x)=(x-\xi_1)(x-\xi_2)\cdots(x-\xi_{N'-1})\omega(x),$$

由于 $A(x)$, $B(x)$ 互质,从而有多项式 $u(x)$, $\nu(x)$ 存在,使得

$$A(x)u(x)+B(x)\nu(x)\equiv 1. \tag{3·26}$$

以 $\Phi(x)$ 乘上式两边,得

$$A(x)\psi^*(x)+B(x)\varphi^*(x)\equiv\Phi(x). \tag{3·27}$$

作带余除法

$$\psi^*(x)\equiv B(x)q_1(x)+r_1(x),$$
$$\varphi^*(x)\equiv A(x)q_2(x)+r_2(x),$$

其中 $r_1(x)$ 与 $r_2(x)$ 的次数分别不超过 $n-\nu$ 与 $m-\mu$. 以此代入(3·27)式并整理之可得

$$A(x)B(x)[q_1(x)+q_2(x)]+A(x)r_1(x)+B(x)r_2(x)$$
$$\equiv\Phi(x). \tag{3·28}$$

设 $q_1(x)+q_2(x)$ 的次数为 l, 比较上式系数可知 $m+n-\mu-\nu+l\leqslant m+n-d$, 即 $l\leqslant\mu+\nu-d$. 因此, (3·28) 式说明,确有次数分别不超过 n 和 m 的多项式 $\psi(x)$ 和 $\varphi(x)$, 使

$$A(x)\psi(x)-B(x)\varphi(x)\equiv\Phi(x). \tag{3·29}$$

现取
$$Q(x)=S(x)\frac{B(x)-\rho\psi(x)}{A(x)-\rho\varphi(x)},$$

则

$$P(x)-Q(x)=S(x)\frac{\rho\Phi(x)}{A(x)[A(x)-\rho\varphi(x)]}. \tag{3·30}$$

所以,只要把 ρ 取得充分小,并调节其正、负号,则可使(3·25)式成立. 因 $\omega(x_j)\neq 0$, 进而有

$$-\operatorname{sign}(P(x_j)-Q(x_j))$$
$$=\operatorname{sign}(f(x_j)-P(x_j)),\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ N'.$$

于是从(3·24)式并注意 ρ 充分小,即知(3·23)式得以满足. 此与 $P(x)$ 的最佳逼近性相矛盾. 必要性证完.

§4 有理 Чебышев 逼近的数值计算

本节将集中介绍几种有理 Чебышев 逼近的数值计算方法. 其中有些方法的详细的理论分析被我们省略了.

4-1 Fox-Goldstein-Lastman 方法*

该方法是为计算有限点集上的有理 Чебышев 逼近而设计的.

设 $\hat{I}=\{1, 2, \cdots, m\}$. 当 $i\in\hat{I}$ 时, 设 A^i 和 B^i 表示 E_n 中的点, 而 b^i 是一实数.

假定 $[B^i, x]=\sum\limits_{j=1}^{n}B_j^i x_j>0$, 对一切 $i\in\hat{I}$ 这个不等式组是相容的, 这等价于假定原点不在 $\{B^i|i\in\hat{I}\}$ 的凸壳上**. 对于任何满足上述假定的 x, 定义

$$F(x)=\max\left\{\left|\frac{[A^i, x]}{[B^i, x]}-b^i\right|:i\in\hat{I}\right\}. \tag{4·1}$$

设

$$\|x\|=\max_{1\leqslant j\leqslant n}|x_j|.$$

对于给定的 $\delta>0$, 定义

$$D_1=\{x\in E_n|\,\|x\|\leqslant 1 \text{ 且 } [B^i, x]\geqslant\delta,\ i\in\hat{I}\}. \tag{4·2}$$

因为当 $\lambda x\neq 0$ 时, $F(\lambda x)=F(x)$. 所以不失一般性, 可假定 x 落在单位球内, 即 $\|x\|\leqslant 1$. 设

$$D_2=\{x\in E_n|\,[C^i, x]\leqslant d^i,\ 1\leqslant i\leqslant k\}, \tag{4·3}$$

此处 $C^i\in E_n$, d^i 是实数且 $k\geqslant 1$. 设 $D=D_1\cap D_2$, 显然可以适当选取 $P^j\in E_n$ 和数 p^j, 使得 $D=\{x\in E_n|\,[P^j, x]\leqslant p^j,\ 1\leqslant j\leqslant r\}$, 其中 $r=m+2n+k$. 自然 $\{P^1, P^2, \cdots, P^r\}$ 是 E_n 中的

---

* 可参见参考文献[37].

** 可参见参考文献[34].

子集．我们的问题是考虑 $F(x)$ 于 D 上的极小化．

设 $I=\{1,2,\cdots,2m\}$ 且设对于 $i\in\hat{I}$，有

$$A^{i+m}=-A^i,\ B^{i+m}=B^i,\ b^{i+m}=-b^i. \tag{4·4}$$

为方便起见，我们写出

$$F(x)=\max_{i\in I}\left\{\frac{[A^i,\ x]}{[B^i,\ x]}-b^i\right\}. \tag{4·5}$$

显然 D 是紧致的且 $F(x)$ 是 D 上的连续函数．所以必有 $z\in D$，使得

$$F(z)\leqslant F(x),\ \text{对一切}\ x\in D. \tag{4·6}$$

Fox–Goldstein–Lastman 方法就是一种构造 z 的方法．

通过具体计算，不难验证下述引理．

引理 10 设 $x,\ x+h\in D$．若 $i\in I$，

$$\frac{[A^i,\ x]}{[B^i,\ x]}=\frac{[A^i,\ x+h]}{[B^i,\ x+h]} \tag{4·7}$$

必须且只须

$$\left[A^i-\frac{[A^i,\ x]}{[B^i,\ x]}B^i,\ h\right]=0. \tag{4·8}$$

定理 11 设以 S 记 $F(x)$ 于 D 上的极小化点集．则

(a) 有点 $y\in S$ 存在，使得

$$\begin{cases} R^i(y)=F(y), & i\in I'\subset I,\\ [P^j,\ y]=p^j, & j\in J'\subset J,\\ R^i(y)<F(y), & i\in I\sim I',\\ [P^j,\ y]<p^j, & j\in J\sim J', \end{cases} \tag{I}$$

其中 $R^i(y)=([A^i,\ y]/[B^i,\ y])-b^i$（当 $i\in I$ 时），而

$$J=\{1,\ \cdots,\ r\}.$$

$I'\cup J'$ 包含 $n+1$ 个点并且集合

$$\{A^i-(b^i+F(y))B^i\,|\,i\in I'\}\cup\{P^j\,|\,j\in J'\} \tag{II}$$

是 n 维的，虽然系统

$$\begin{cases}[A^i-(b^i+F(y))B^i,\ x]<0,\ i\in I',\\ [P^j,\ x]\leqslant 0, \qquad\qquad\qquad j\in J'\end{cases} \tag{III}$$

是不相容的.

(b) 若存在一点 $y\in E_n$ 满足 (I), 同时系统 (III) 是不相容的, 则 $y\in S$.

(c) S 是紧致的且是凸的.

证明 由 (4·6) 可知 S 是非空的. 取 $u\in S$ 并假定 (III) 相容, 而 h 是它的一组解. 根据 R^i 在 D 上的连续性, 不难看出有 $\lambda>0$ 存在, 使得

$$[A^i-(b^i+R^i(u+\xi h))B^i,\ h]<0,\ 对一切\ i\in I',\ 0\leqslant\xi\leqslant\lambda;$$

$$R^i(u+\lambda h)<F(u),\ 对于\ i\in I\sim I';$$

$$[P^j,\ u+\lambda h]\leqslant p^j,\ 对于\ j\in J.$$

按均值定理, 有

$$R^i(u+\lambda h)=R^i(u)+\lambda[\nabla R^i(u+\xi_i h),\ h],\ i\in I,$$

其中 $\nabla R^i(u+\xi_i h)$ 是 R^i 于 $u+\xi_i h$ 处的梯度, $0<\xi_i<\lambda$. 可以算得

$$\nabla R^i(u+\xi_i h)=(A^i-(b^i+R^i(u+\xi_i h))B^i)/[B^i,\ u+\xi_i h].$$

因为 $u+\xi_i h\in D$, 对一切 $i\in I$, 有 $[B^i,\ u+\xi_i h]>0$, 所以如果 $i\in I'$, 则 $[\nabla R^i(u+\xi_i h),\ h]<0$. 从而

$$\max_{i\in I} R^i(u+\lambda h)=F(u+\lambda h)<F(u).$$

这与 $u\in S$ 相矛盾, 所以(III)不相容.

设

$$Q=\{A^i-(b^i+F(u))B^i\,|\,i\in I'\}\cup\{P^j\,|\,j\in J'\}.$$

假定 Q 是 r 维的, 且 $r<n$. 选择 $h\neq 0$ 垂直于 Q 张成的空间. 并选取满足下述两式中任意一个的量值最小的 $\mu\neq 0$:

$$R^{i_0}(u+\mu h)=F(u), \text{ 对某 } i_0 \in I \sim I'$$

或者 $$[P^{j_0}, u+\mu h]=p^{j_0}, \text{ 对某 } j_0 \in J \sim J'.$$

因为 $\{P^j | j \in J\}$ 是 n 维的且 D 紧致，所以它们中至少有一个成立. 由引理 10, 可知

$$R^i(u+\mu h)=R^i(u), \text{ 当 } i \in I',$$

$$[P^j, u+\mu h]=[P^j, u], \text{ 当 } j \in J'.$$

显然 $A^{i_0}-(b^{i_0}+F(u))B^{i_0}$ 和 P^{j_0} 都不属于 Q 张成的空间. 因而能构作一点 u, 使得 Q 至少是 $r+1$ 维的. 如果必要的话，我们再重复上面的讨论，这样可以找到一点 u, 使得 Q 是 n 维的.

如果 Q 包含多于 n 个的点，则已经完毕了；否则由 Cramer 规则可知 (III) 相容. 这个矛盾说明 (a) 的 (II) 成立.

为了证明 (c), 只须通过计算去验明对一切 M 而言集合 $\{x \in D | F(x) \leqslant M\}$ 是凸的，并且显然这个集合还是有界闭集.

为证(b)，假定 (I) 和 (III) 成立. 今选择 $x \in D$. 若 J' 非空，则对一切 $j \in J'$, 有

$$[P^j, x-y] \leqslant 0.$$

因为 (III) 是不相容的，对于某 $i_0 \in I'$, 有

$$[A^{i_0}-(b^{i_0}+F(y))B^{i_0}, x-y] \geqslant 0.$$

由于对一切 $i \in I'$, 都有

$$[A^i-(b^i+F(y))B^i, y]=0,$$

从而 $$[A^{i_0}-(b^{i_0}+F(y))B^{i_0}, x] \geqslant 0.$$

所以 $F(x) \geqslant F(y)$. 即 $y \in S$.

命题 2 若 $F(y)>0$, 则由 $i \in I'$ 可推出 $(i+m) \overline{\in} I'$.

事实上，若 i 和 $(i+m) \in I'$, 通过计算可得 $2F(y)[B^i, y]=0$, 从而矛盾.

具体算法

步骤 I　假设 x' 给定在 D 的边界上. 因而

$$R^i(x')\leqslant F(x'),\ \text{对一切}\ i\in I,$$

$$[P^j,\ x']\leqslant p^j,\quad \text{对一切}\ j\in J,$$

等号依次在 $i\in I'$ 和 $j\in J'$ 处取到，并且 I' 和 J' 是非空的. 设

$$Q'=\{A^i-(b^i+F(x'))B^i\,|\,i\in I'\}\cup\{P^j\,|\,j\in J'\}.$$

如果 Q' 的维数 r 等于 n, 则转到步骤 II; 否则选取 h 垂直于 Q'; 选取 λ_i(每当它存在时), 使得满足

$$[A^i-(b^i+F(x'))B^i,\ x'+\lambda_i h]=0,\ \ i\in I\sim I';$$

类似地, 如果可能的话选取 λ_j, 使之满足

$$[P^j,\ x'+\lambda_j h]=p^j,\ \ j\in J\sim J'.$$

用 λ 表示按量值最小的 $\lambda_j(j\in J\sim J')$ 或 $\lambda_i(i\in I\sim I')$. 定义 $x''=x'+\lambda h$.

以下两式来确定 I'' 和 J'':

$$R^i(x'')=F(x''),\ \ i\in I'',$$

$$[P^j,\ x'']=p^j,\qquad j\in J''.$$

类似于 Q' 地确定 Q''. 则 $\{Q''\}$ 维数 $\geqslant r+1$. 若 $r+1=n$, 则转到步骤 II, 而置 $I'=I''$, $J'=J''$, $Q'=Q''$; 否则取 $x'=x''$ 而转到步骤 I.

步骤 II　Q' 是 n 维的. 若 $I'\cup J'$ 所包含点的数目大于 n, 则取 $\bar{\alpha}=0$ 并转向步骤 III. 否则, 设以 $x(\alpha)$ 表示下述方程组的解

$$S(\alpha)\begin{cases}[A^i-(b^i+F(x')-\alpha)B^i,\ x(\alpha)]=0, & i\in I',\\ [P^j,\ x(\alpha)]=p^j, & j\in J'.\end{cases}$$

对于每个 $\alpha\leqslant F(x')$, 这样的 $x(\alpha)$ 存在.

设

$$\mathscr{A}=\{\alpha \mid x(\alpha) \text{ 满足 } S(\alpha),\ x(\alpha)\in D,$$
$$F(x(\alpha))=F(x')-\alpha\},$$
$$\bar{\alpha}=\sup \mathscr{A}.$$

选取 $\bar{x}$ 满足 $S(\bar{\alpha})$，使其适合

$$[A^{i_0}-(b^{i_0}+F(x')-\alpha)B^{i_0},\ \bar{x}]=0,\ \text{对某 } i_0\in I\sim I'$$

或 $$[P^{j_0},\ \bar{x}]=p^{j_0},\ \text{对某 } j_0\in J\sim J',$$

且 $$C\cup\{A^i-(b^i+F(x')-\bar{\alpha})B^i \mid i\in I'\}\cup\{P^j \mid j\in J'\}$$
$$=C\cup Q(\bar{\alpha})$$

秩数为 n，此处

$$C=A^{i_0}-(b^{i_0}+F(x')-\bar{\alpha})B^{i_0}\quad \text{或}\quad P^{j_0}.$$

I' 增加 i_0 或 J' 增加 j_0. 转向步骤 III.

步骤 III 若不等式组

$$S(\bar{\alpha})\begin{cases}[A^i-(b^i+F(x')-\bar{\alpha})B^i,\ h]<0, & i\in I',\\ [P^j,\ h]\leqslant 0, & j\in J'\end{cases}$$

不相容，则 $\bar{x}$ 是一个解. 反之，若这个不等式组是相容的，则任选一个满足它的向量 h. 选取满足

$$\max\{R^i(\bar{x}+\lambda h) \mid i\in I\sim I'\}$$
$$=\max\{R^i(\bar{x}+\lambda h) \mid i\in I'\}<F(x')-\bar{\alpha},$$
$$[P^j,\ \bar{x}+\lambda h]\leqslant p^j,\ j\in J\sim J'$$

的最小正数 λ. 转向步骤 I，此时 $x'=\bar{x}+\lambda h$.

关于这种算法各步骤的理论说明，主要是依据前面介绍的预备性质. 详细情形请参阅 Fox, Goldstein 和 Lastman 的文章[37].

例 用 FGL 方法计算

$$f(a,\ b)=\mathrm{Re}\left\{\int_{a+ib}^{\infty}(e^{-z}/z)\,dz\right\}$$

的近似值，其中 $(a,\ b)\in\{(a,\ b) \mid 0\leqslant a\leqslant 1,\ 0\leqslant b\leqslant 1\}$，而

$f(0, 0)=\infty$.

我们先取定25个点

$$a=0.2(0.2)1.0,$$
$$b=0.2(0.2)1.0.$$

设 $$x=a-0.6, \quad y=b-0.6.$$

在这25个点上,用有理分式

$$\frac{c_0+c_1y+c_2x+c_3xy+c_4y^2+c_5x^2+c_6x^2y}{d_0+d_1y+d_2x+d_3xy+d_4y^2+d_5x^2+d_6x^2y}$$

来逼近 $f(a, b)$.

采用 Fox-Goldstein-Lastman 方法, 可以求得最佳逼近有理分式的系数为

$$c_0=0.0837914633, \quad d_0=0.5032968598,$$
$$c_1=-0.1640272544, \quad d_1=0.8973700662,$$
$$c_2=0.0891182027, \quad d_2=0.8928419099,$$
$$c_3=0.1204883022, \quad d_3=1.0000000000,$$
$$c_4=-0.3867638268, \quad d_4=0.4322944985,$$
$$c_5=-0.0701517797, \quad d_5=0.6495118685,$$
$$c_6=-0.0289637846, \quad d_6=0.7869549905.$$

在所给25个点上的最大误差为 1.4388298×10^{-3}.

如果我们改用更多项的有理分式

$$\frac{c_0+c_1y+c_2x+c_3xy+c_4y^2+c_5x^2+c_6x^2y+c_7y^3+c_8xy^2}{d_0+d_1y+d_2x+d_3xy+d_4y^2+d_5x^2+d_6x^2y+d_7y^3+d_8xy^2}$$

来逼近 $f(a, b)$, 则在同样25个点上用 Fox-Goldstein-Lastman 方法,可以求得最佳逼近有理分式的系数为

$$c_0=0.0960041046, \quad d_0=0.5718305472,$$
$$c_1=-0.2406299991, \quad d_1=0.7357740426,$$
$$c_2=0.0998915478, \quad d_2=1.00000000,$$

$c_3=0.0867557146,\quad d_3=0.5014273072,$

$c_4=-0.2499496967,\quad d_4=0.7704642845,$

$c_5=-0.0854718254,\quad d_5=0.7047651776,$

$c_6=0.0283182696,\quad d_6=0.1880050704,$

$c_7=-0.1066314166,\quad d_7=0.1740235386,$

$c_8=0.0820618837,\quad d_8=0.6828501570.$

于 25 点上的最大误差为 1.837059×10^{-4}.

如果我们仍然采用第二类有理分式来逼近 $f(a, b)$. 但改用 100 点

$$a=0.1(0.1)1.0,$$
$$b=0.1(0.1)1.0.$$

并设 $$x=a-0.55,\quad y=b-0.55.$$

用 Fox-Goldstein-Lastman 方法可求得最佳逼近有理分式的系数为

$c_0=0.1157842294,\quad d_0=0.5559147072,$

$c_1=-0.1925531085,\quad d_1=0.9885289044,$

$c_2=0.1144356251,\quad d_2=1.000000000,$

$c_3=0.1098909731,\quad d_3=0.7230335039,$

$c_4=-0.4242775100,\quad d_4=0.8556143567,$

$c_5=-0.1153246269,\quad d_5=0.6618566410,$

$c_6=0.0077507759,\quad d_6=0.2155059213,$

$c_7=-0.1422053729,\quad d_7=0.2096329609,$

$c_8=0.2198488738,\quad d_8=0.4174542178.$

其在 100 个点上的最大误差为 1.251383×10^{-3}.

4-2 微分修正算法与下降算法*

有理 Чебышев 逼近问题是一个求下述极小的问题

* 可参见参考文献 [24].

$$\Delta(C,\ d)=\sup\left|f(x)-\frac{\sum c_j x^j}{\sum d_j x^j}\right|=\min.$$

它也可以表述为下面类型的极小值问题

$$\Delta(C)=\sup_i \frac{(A^i,\ C)+a_i}{(B^i,\ C)+b_i}=\min.$$

此处 A^i, B^i 和 C 都是 n 维向量, $(,)$表示通常的内积. 为使讨论能够进行, 我们仅限于考虑区域

$$D=\{C\in E_n \mid (B^i,\ C)+b_i>0,\ \text{对一切 } i\}$$

中的向量 C.

本段恒假定 i 指标的范围是一个有限集合.

问题现在可叙述为: 寻求 $C^*\in D$, 使

$$\Delta(C^*)=\inf_{C\in D}\Delta(C).$$

引理 11 Δ 在 D 上的局部极小必然也是整体极小.

事实上, 如果 C^* 是 D 上的非整体极小的局部极小点. 则存在 $C^0\in D$, 使得

$$\Delta(C^0)<\Delta(C^*).$$

引入辅助函数

$$R^i(C)=\frac{(A^i,\ C)+a_i}{(B^i,\ C)+b_i},$$

并选取 i, 使得

$$R^i(C^*)=\Delta(C^*),$$

且 R^i 在 C^0 方向上是不减的. 由于 R^i 在 D 内是连续可微的, 根据 Rolle 定理, 有点 $\lambda C^*+(1-\lambda)C^0$, $0<\lambda<1$ 存在, 使

$$\frac{dR^i}{d\lambda}=0.$$

实际计算可得

$$\frac{dR^i}{d\lambda}=\frac{\left\{\begin{array}{c}[(B^i,\ C^0)+b^i](A^i,\ C^*-C^0)\\ -[(A^i,\ C^0)+a_i](B^i,\ C^*-C^0)\end{array}\right\}}{[(B^i,\ \lambda C^*+(1-\lambda)C^0)+b_i]^2}.$$

从而当 $\dfrac{dR^i}{d\lambda}$ 在连接 C^* 和 C^0 的线段上某点处为 0，则它必在整个线段上为 0. 所以

$$\Delta(C^0)\geqslant R^i(C^0)=R^i(C^*)=\Delta(C^*).$$

此与假设相矛盾.

定理 12 为使 C^* 是函数 $\Delta(C)$ 在 D 中的极小值点，必须且只须如下线性不等式组是不相容的:

$$(A^i-\mu B^i,\ z)<0 \quad (i\in I), \tag{4·9}$$

此处 $\mu=\Delta(C^*)$，而 $I=\{i\,|\,R^i(C^*)=\mu\}$.

证明 假定 C^* 是 $\Delta(C)$ 于 D 中的极小值点. 对充分小的 z，必有

$$\Delta(C^*+z)\geqslant\Delta(C^*).$$

从而对某 $i\in I$，有

$$\frac{(A^i,\ C^*+z)+a_i}{(B^i,\ C^*+z)+b_i}\geqslant\frac{(A^i,\ C^*)+a_i}{(B^i,\ C^*)+b_i}.$$

于是

$$(A^i-\mu B^i,\ z)\geqslant 0,$$

也即(4·9)不相容.

反之，若(4·9)不相容，则对每个 z 都存在 $i\in I$，使

$$(A^i,\ z)\geqslant\mu(B^i,\ z).$$

上式两边各加 $(A^i,\ C^*)+a_i=\mu[(B^i,\ C^*)+b_i]$，可知

$$(A^i,\ C^*+z)\geqslant\mu[(B^i,\ C^*+z)+b_i].$$

此即 $\Delta(C^*+z)\geqslant\mu$，从而 C^* 是 $\Delta(C)$ 于 D 中的极小值点.

为了在更一般情况下介绍微分修正算法，我们设 $A_i(C)$ 和 $B_i(C)$ $(i=1,\ \cdots,\ m)$ 表示任意集合 D 上的实值函数，并假定

$$0<\alpha\leqslant B_i(C)\leqslant\beta \tag{4·10}$$

对一切 $C\in D$ 和一切 i 皆成立.

定义 $$\Delta(C)=\max_i \frac{A_i(C)}{B_i(C)}.$$

假定 C^{k-1} 已经算出，定义辅助函数

$$\delta_k(C)=\max_i \frac{A_i(C)-\Delta(C^{k-1})\cdot B_i(C)}{B_i(C^{k-1})} \tag{4·11}$$

并把 $\delta_k(C)$ 在 D 上的极小值点取作 C^k. 顺便指出，在 $A_i(C)$ 和 $B_i(C)$ 是线性函数加一常数的最重要情况下，$\delta_k(C)$ 的极小值点可以用线性规划的方法求得.

按照以下微分修正算法所形成的向量序列 $\{C^k\}$ 一般是不收敛的. 然而它们却作成 $\Delta(C)$ 的极小化序列.

定理 13 $\{\Delta(C_k)\}$ 是一个单调下降序列，且

$$\lim_{k\to\infty}\Delta(C^k)=\inf_{C\in D}\Delta(C)=\Delta^*. \tag{4·12}$$

首先，由于 C^k 是 $\delta_k(C)$ 的极小值点，有

$$\delta_k(C^k)\leqslant\delta_k(C^{k-1})=\max_i \frac{A_i(C^{k-1})}{B_i(C^{k-1})}-\Delta(C^{k-1})=0. \tag{4·13}$$

对于任一 C，亦有

$$\delta_k(C^k)\leqslant\delta_k(C)=\max_i\left\{\left[\frac{A_i(C)}{B_i(C)}-\Delta(C^{k-1})\right]\frac{B_i(C)}{B_i(C^{k-1})}\right\}. \tag{4·14}$$

于(4·14)中令 $C=C^k$，并利用(4·13)式可知

$$\delta_k(C^k)\geqslant\frac{\beta}{\alpha}[\Delta(C^k)-\Delta(C^{k-1})]. \tag{4·15}$$

今选取 $C\in D$，使得 $\Delta(C)\leqslant\Delta(C^{k-1})$. 这是一定可以取到的，否则 C^{k-1} 为所求的极小值点了. 于是由 (4·14)，有

$$\delta_k(C^k)\leqslant\frac{\alpha}{\beta}\max_i\left[\frac{A_i(C)}{B_i(C)}-\Delta(C^{k-1})\right]$$

$$=\frac{\alpha}{\beta}[\Delta(C)-\Delta(C^{k-1})].$$

利用(4·15)式，可得到

$$\Delta(C^k)-\Delta(C^{k-1})\leqslant\frac{\alpha^2}{\beta^2}[\Delta(C)-\Delta(C^{k-1})]. \tag{4·16}$$

即
$$\Delta(C^k)\leqslant\Delta(C^{k-1})+\frac{\alpha^2}{\beta^2}[\Delta(C)-\Delta(C^{k-1})].$$

再根据下界和下确界的关系式，可得

$$\Delta(C^k)\leqslant\Delta(C^{k-1})+\frac{\alpha^2}{\beta^2}[\Delta^*-\Delta(C^{k-1})]. \tag{4·17}$$

它说明 $\{\Delta(C^k)\}$ 是一个单调下降序列.

如果 $\Delta(C^k)\searrow-\infty$，则显然 C^k 为极小化序列了. 否则 $\{\Delta(C^k)\}$ 是一个单调有界序列，当然是有极限的. 今于(4·17)两边令 $k\to\infty$，可得

$$\Delta^*-\lim_{k\to\infty}\Delta(C^{k-1})\geqslant 0. \tag{4·18}$$

但显然
$$\Delta^*-\Delta(C^{k-1})\leqslant 0,\ k=1,\ 2,\ \cdots.$$

从而又有

$$\Delta^*-\lim_{k\to\infty}\Delta(C^{k-1})\leqslant 0. \tag{4·19}$$

从(4·18)和(4·19)可知必有

$$\lim_{k\to\infty}\Delta(C^k)=\Delta^*=\inf_{C\in D}\Delta(C).$$

从该定理的证明中，我们不难从(4·17)和 Δ^* 的定义来给出 Δ^* 的所在范围为

$$\Delta(C^k)+\frac{\beta^2}{\alpha^2}[\Delta(C^{k+1})-\Delta(C^k)]$$
$$\leqslant\Delta^*\leqslant\Delta(C^k),\ k=1,\ 2,\ \cdots.$$

下面我们回到一开始给出的形式:

$$R^i(C)=\frac{(A^i,\ C)+a_i}{(B^i,\ C)+b_i},\ \ \Delta(C)=\max_i|R^i(C)|,$$

且 $D=\{C\,|\,(B^i,\ C)+b_i>0\}$.

我们来介绍一种下降算法．首先任意取定一个初始向量 $C^0\in D$．从 C^0 出发，选择一个使 $\Delta(C)$ 下降的方向．如果从 C^0 出发的各个方向上 $\Delta(C)$ 都是不减的，则 $\Delta(C)$ 在 C^0 处取局部极小值．于是由引理 11，C^0 是 $\Delta(C)$ 的整体极小值点，从而 C^0 即为所求者．此时计算可以停止．

如果置 $\mu=\Delta(C^0)$，$I=\{i||R^i(C^0)|=\mu\}$．因为 Δ 减小必须且只须对一切 $i\in I$，$|R^i|$ 是减小的．所以我们着手寻求向量 z，使之满足

$$\frac{d}{d\lambda}\left|R^i(C^0+\lambda z)\right|_{\lambda=0}\leqslant -1,\ i\in I.$$

它等价于求解下述关于 z 的线性不等式组

$$(\sigma_i A^i-\mu B^i,\ z)\leqslant -(B^i,\ C^0)-b_i,\ \ i\in I, \qquad (4\cdot 20)$$

其中 $\sigma_i=\operatorname{sign} R^i(C^0)$．

参考文献[34]中指出一种求解线性不等式组的方法．按照所述方法，只要向量组 $\{\sigma_i A^i-\mu B^i|i\in I\}$ 的秩数为 r，则可以把其中某 r 个线性无关向量所相应的不等式（(4·20) 所示的）径直改成等号．而求解这 r 个方程所组成的方程组．所得解也是不等式组(4·20)的一组解．在 [41] 中 Goldstein 和 Cheney 讨论了线性不等式组的求解方法．我们在这里就不详述了．有兴趣的读者请参阅[41]．

假定我们已按 (4·20) 解出向量 z．然后把 $\Delta(C)$ 在直线 $C^0+\lambda z$ 上的极小值点取作下一个近似 C^1．这可以这样来实现：设 λ_2 是任意一个使 $C^0+\lambda_2 z\in D$ 且满足

$$\Delta(C^0+\lambda_2 z)>\Delta(C^0)$$

的正数．则所须求的 λ 值介于 $\lambda_1=0$ 和 λ_2 之间．又取 $\lambda_3=(\lambda_1+\lambda_2)/2$，而考察 $\frac{d\Delta}{d\lambda}$ 于 $\lambda=\lambda_3$ 处的符号．若取正号，则所求

的 λ 位于 $[\lambda_1, \lambda_3]$ 中；否则 λ 位于 $[\lambda_3, \lambda_2]$ 中……. 以 C^1 替代 C^0，再重复以上步骤. 依此类推.

4-3 线性不等式方法*

离散点集上一般有理逼近问题可叙述为以一个函数系的线性组合和另一个函数系的线性组合的比来逼近在离散点集上有定义的已知函数.

具体言之，设 $A=(a^1, \cdots, a^v)$，其中每个 a^i 都是一个 n 维向量；$B=(b^1, \cdots, b^v)$，其中每个 b^i 是一个 m 维向量；$C=(C_1, \cdots, C_v)$，其中每个 C_i 都是一个实数. 又设

$$v>n+m-1.$$

记

$$M(x, y)=\max_{1\leqslant i\leqslant v}\left|C_i-\frac{[x, a^i]}{[y, b^i]}\right|, \tag{4·21}$$

其中 x 和 y 依次是 n 维和 m 维向量，而 $[x, a^i]$ 和 $[y, b^i]$，$i=1, \cdots, v$ 表示 Euclid 内积.

为使以下的讨论得以进行，记

$$S=\{(x, y)\,|\,\delta_1\leqslant[y, b^i]\leqslant\delta_2,\ i=1, \cdots, v\},$$

此处 δ_1 和 δ_2 是给定的实数，$0<\delta_1<\delta_2<2$.

我们的问题可叙述为：寻求 $(x^*, y^*)\in S$，使得

$$M(x^*, y^*)=\min_{(x,y)\in S}M(x, y). \tag{4·22}$$

这里所要介绍的只是一种构作极小化序列的方法. 即生成 S 中的一个序列 $\{(x^k, y^k)\}$，$k=0, 1, \cdots$，使得

$$\lim_{k\to\infty}M(x^k, y^k)=\min_{(x,y)\in S}M(x, y).$$

线性不等式方法，就是把(4·22)转化为寻求使下述 $3v$ 个不等式成立的最小 M：

---

* 可参见参考文献 [49].

$$M \geqslant \left| C_i - \frac{[x,\ a^i]}{[y,\ b^i]} \right|, \quad i=1, \cdots, v,$$

$$[y,\ b^l] - \delta_1 \geqslant 0, \qquad l=1, \cdots, v, \qquad (4\cdot 23)$$

$$-[y,\ b^k] + \delta_2 \geqslant 0, \qquad k=1, \cdots, v.$$

如果将前 v 个不等式分别用相应的 $[y,\ b^i]$ 去乘，并去掉绝对号(相当于增加 v 个不等式)，则 (4·23) 又等价于求使下述 $4v$ 个不等式成立的最小 M:

$$f_i(x,\ y,\ M) \equiv [x,\ a^i] + (M - C_i)[y,\ b^i] \geqslant 0,$$

$$i=1, \cdots, 2v,$$

$$f_{l+2v}(x,\ y,\ M) \equiv [y,\ b^l] - \delta_1 \geqslant 0,\ l=1, \cdots, v, \qquad (4\cdot 24)$$

$$f_{k+3v}(x,\ y,\ M) \equiv -[y,\ b^k] + \delta_2 \geqslant 0,\ k=1, \cdots, v,$$

其中为了记号上的统一，已记

$$a^{i+v} = -a^i,\ C_{i+v} = -C_i,\ b^{i+v} = b^i,\ i=1, \cdots, v.$$

该算法是去生成一个序列

$$\{\mathscr{L}_r,\ M_r,\ H_r,\ x^r,\ y^r\},\ r=0,\ 1,\ 2, \cdots,$$

使得 $$\lim_{r\to\infty} M_r = \lim_{r\to\infty} M(x^r,\ y^r) = \min_{(x,y)\in S} M(x,\ y).$$

具体构作方法是：取

$$\mathscr{L}_0 = 0,\ H_0 = \max_{1\leqslant i\leqslant v} |C_i|,\ x^0 = 0, \qquad (4\cdot 25)$$

并选取 y^0，使得 $(x^0,\ y^0) \in S$. 则

i) $$M_r = \frac{\mathscr{L}_r + H_r}{2},\ r=0,\ 1, \cdots; \qquad (4\cdot 26)$$

ii) 若不等式组

$$f_i(x,\ y,\ M_r) \geqslant 0,\ i=1, \cdots, 4v \qquad (4\cdot 27)$$

不相容，则取

$$\mathscr{L}_{r+1} = M_r,\ H_{r+1} = H_r,\ x^{r+1} = x^r,\ y^{r+1} = y^r. \qquad (4\cdot 28)$$

如果不等式组 (4·27) 是相容的，则 x^{r+1} 和 y^{r+1} 可以选择满足 (4·27)，并取

$$\mathscr{L}_{r+1}=\mathscr{L}_r,\ H_{r+1}=M_r.$$

所述方法尚有判定线性不等式是否相容以及相容时如何求解等问题. 在 [41] 中 Goldstein 和 Cheney 已有专门的论述.

在 [49] 中 Loeb 利用动态规划的方法具体构造了一个极小化序列 $(x^r, y^r)\in S$, 使

$$\lim_{r\to\infty} M(x^r, y^r)=\min_{(x,y)\in S} M(x, y).$$

作为例子, H. L. Loeb 在[49]中还考虑在 $t=0$ 到 $t=\pi/4$ 的 50 个等分点的集合 S 上, 用 $(x_1t+x_2t^3)/(y_1+y_2t^2)$ 逼近 $\operatorname{tg} x$ 的问题. 他算出

$$x_1=1.0000215,\ x_2=-0.06885576,$$
$$y_1=1.0000000,\ y_2=-0.40194845.$$

最大绝对误差为 0.26×10^{-5}. 比在同一点集上的最佳逼近多项式

$$p(t)=1.0025059+0.30337682t^3+0.21872155t^5$$

的最大绝对误差 0.29×10^{-3} 要好 100 倍.

4-4 Ремез 算法*

关于最佳逼近有理分式近似计算的 Ремез 方法, 已有许多作者从各种不同的角度进行过讨论. 由于这种方法与多项式逼近时的 Ремез 方法十分类似, 所以此处仅对 Ремез 方法作一番扼要的介绍.

考虑 (1·12) 给出的有理分式函数 $R(A, x)$, 其中特别还取 $p=q=0$, $b_0=1$. 即

$$R(A, x)=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{1+b_1x+\cdots+b_mx^m}. \tag{4·29}$$

Ремез 算法的具体步骤为:

* 可参见参考文献 [63]、[35]、[60].

1° 于 [0, 1] 中选取一个由 $N=m(A)+1=n+m+2$ 个点

$$0\leqslant x_1^{(1)}<x_2^{(1)}<\cdots<x_N^{(1)}\leqslant 1$$

组成的点集 $X_1=\{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_N^{(1)}\}$. 通常这 N 个点就取 $f(x)-R(A_0, x)$ 的极值点，其中 $R(A_0, x)$ 是一给定的初始近似.

2° 求解非线性方程组

$$f(x_i^{(1)})-R(A, x_i^{(1)})=(-1)^i E, \ i=1, 2, \cdots, N \quad (4\cdot30)$$

而得到新的未知参数值 $a_0^{(1)}, \cdots, a_n^{(1)}, b_1^{(1)}, \cdots, b_m^{(1)}, E$. 从而求出新的有理逼近式 $R(A_1, x)$.

3° 求 $f(x)-R(A_1, x)$ 于 [0, 1] 内的最大值点 τ.

4° 以上面求出的 τ 代替 X_1 中的某一点，使得 $f(x)-R(A_1, x)$ 在新求得的点集 $X_2=\{x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \cdots, x_N^{(2)}\}$ 上交错变号. 这可以这样来实现: 因为各系数和 E 都是从(4·30)中解出的，所以 $f(x)-R(A_1, x)$ 在点集 X_1 上是交错的. 因而，如果 τ 点落在 X_1 内部，比如 $x_j^{(1)}\leqslant\tau\leqslant x_{j+1}^{(1)}$，则 τ 必同 $x_j^{(1)}$, $x_{j+1}^{(1)}$ 中的某一个点使 $f(x)-R(A_1, x)$ 于它们处同号，即

$$\operatorname{sign}[f(\tau)-R(A_1, \tau)]=\operatorname{sign}[f(x_j^{(1)})-R(A_1, x_j^{(1)})]$$

$$\text{或} \quad \operatorname{sign}[f(x_{j+1}^{(1)})-R(A_1, x_{j+1}^{(1)})].$$

此时我们就以 τ 替换这个“同号”的点; 如果 $0\leqslant\tau\leqslant x_1^{(1)}$，则当 τ 与 $x_1^{(1)}$ 处 $f(x)-R(A_1, x)$ 同号时，就以 τ 替代 $x_1^{(1)}$. 否则，我们就同时保留 τ 与 $x_1^{(1)}$，而去掉最后的 $x_N^{(1)}$ 点; 如果 $x_N^{(1)}\leqslant\tau\leqslant 1$，则当 τ 与 $x_N^{(1)}$ 处 $f(x)-R(A_1, x)$ 同号时，就以 τ 替代 $x_N^{(1)}$. 否则，我们就同时保留 $x_N^{(1)}$ 与 τ，而去掉 $x_1^{(1)}$ 点.

5° 以 X_2 替代 X_1，而重复 2°、3° 和 4° 等各步骤. 利用第 r 步迭代所得点集 X_r，构造有理分式 $R(A_r, x)$.

A. Ralston 于 [59] 中，在假定初始近似足够好的前提下

给出了 Ремез 算法的收敛性:

定理 14 设 $R(A^*, x)$ 为 $f(x)$ 的形如 (4·29) 的最佳逼近有理分式. 上述 Ремез 算法的初始近似 $R(A_0, x)$ 于 $[0, 1]$ 上恰有 N 个正负相间的极值点, 它的第一个极值(即相应最小横坐标的那个)与 $f(x)-R(A^*, x)$ 的第一个极值符号相同. 设 $X_1=\{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_N^{(1)}\}$ 是 $f(x)-R(A_0, x)$ 的 N 个极值点的横坐标

$$0\leqslant x_1^{(1)}<x_2^{(1)}<\cdots<x_N^{(1)}\leqslant 1.$$

$E_{\min}$ 是误差极值的最小数值. 又设 $X_*=\{x_1^*, x_2^*, \cdots, x_N^*\}$ 是 $f(x)-R(A^*, x)$ 的 N 个极值点(极值大小为 $r_{n,m}^*=\|f(x)-R(A^*, x)\|$) 的横坐标,

$$0\leqslant x_1^*<x_2^*<\cdots<x_N^*\leqslant 1.$$

则有 $\varepsilon>0$ 和 $\eta>0$ 存在,使当

$$|x_i^{(1)}-x_i^*|<\varepsilon, \quad i=1, \cdots, N,$$

$$r_{n,m}^*-E_{\min}<\eta$$

时,只要采用恰当的方法求解 (4·30),则 Ремез 算法收敛. 即 $\lim\limits_{r\to\infty} R(A_r, x)=R(A^*, x)$.

关于方程组 (4·30) 的解法, Ralston 曾经指出采用弦截法是适宜的. 关于有理分式出现退化的情况(相当于 (1·12) 中的 $d=\min(p, q)\neq 0$) 的 Ремез 方法的讨论,文[60]中也作了比较详细的叙述. 此处我们不再详述, 有兴趣的读者可参阅 [60]、[59] 和 [63].

C. T. Fike[35] 指出第 1° 步中点集 $X_1=\{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_N^{(1)}\}$ 常可取为

$$x_k^{(1)}=\frac{1}{2}\cos\frac{(N-k)\pi}{N-1}+\frac{1}{2}, \quad k=1, 2, \cdots, N.$$

于 [35] 中, Fike 还给出了求解 (4·30) 的一种迭代方法.

他首先把(4·30)化为等价形式

$$
\begin{aligned}
&a_0+a_1x_i^{(1)}+\cdots+a_nx_i^{(1)^n}+b_1x_i^{(1)}[(-1)^iE-f(x_i^{(1)})]\\
&\quad+b_2x_i^{(1)^2}[(-1)^iE-f(x_i^{(1)})]+\cdots\\
&\quad+b_mx_i^{(1)^m}[(-1)^iE-f(x_i^{(1)})]+(-1)^iE\\
&=f(x_i^{(1)}),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N.
\end{aligned}
\tag{4·31}
$$

又把(4·31)改为

$$
\begin{aligned}
&a_0+a_1x_i^{(1)}+\cdots+a_nx_i^{(1)^n}+b_1x_i^{(1)}[(-1)^iE'-f(x_i^{(1)})]\\
&\quad+b_2x_i^{(1)^2}[(-1)^iE'-f(x_i^{(1)})]+\cdots\\
&\quad+b_mx_i^{(1)^m}[(-1)^iE'-f(x_i^{(1)})]+(-1)^iE\\
&=f(x_i^{(1)}),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N.
\end{aligned}
\tag{4·32}
$$

Fike 迭代算法为：取 $E'=0$，则(4·32)是一个关于 $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n,\ b_1,\ \cdots,\ b_m,\ E$ 的线代数方程组. 于是可以求出 $a_0,\ \cdots,\ a_n,\ b_1,\ \cdots,\ b_m$ 和 $E^{(1)}$. 以新求出的 $E^{(1)}$ 代替(4·32)中的 E'，则又可以求出一组 $a_0,\ \cdots,\ a_n,\ b_1,\ \cdots,\ b_m,\ E^{(2)}$. 又以新求出的 $E^{(2)}$ 代替(4·32)中的 E'，则又可求出一组 $a_0,\ \cdots,\ a_n,\ b_1,\ \cdots,\ b_m,\ E^{(3)},\ \cdots$. Fike 指出该迭代过程是收敛的.

Fike 还指出了求最佳相对有理逼近的 Ремез 方法的如下修正：只要把 Ремез 方法中 $f(x)-R(A,\ x)$ 改为 $[f(x)-R(A,\ x)]/f(x)$，并将(4·30)改为

$$f(x_i^{(1)})-R(A,\ x_i^{(1)})=(-1)^iEf(x_i^{(1)}),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$$

即可.

例 设 $f(x)=\cos\frac{1}{4}\pi x$. 欲在 $[-1,\ 1]$ 上用

$$R(A,\ x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5}{1+b_1x+b_2x^2}$$

作最佳一致逼近.

因为 $f(x)$ 是偶函数，$[-1,\ 1]$ 是以原点为对称的区间，所以 $R(A^*,\ x)$ 的分子分母必只出现偶次幂. 即只须考虑有

理分式

$$R(A, x)=\frac{a_0+a_2x^2+a_4x^4}{1+b_2x^2}.$$

由 Чебышев 逼近理论，最佳逼近有理分式的临界点集应有9个点．又按对称性，其应满足

$$-x_1^*=x_9^*,\ -x_2^*=x_8^*,\ -x_3^*=x_7^*,\ -x_4^*=x_6^*,\ x_5^*=0.$$

如果在 Ремез 方法的第 1° 步中，初始点集 X_1 中各点满足类似的条件，则在往后的迭代中仍会保持这种关系．所以初始点集 $X_1=\{-x_9,\ -x_8,\ -x_7,\ -x_6,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_9\}$ 取为

$$x_i=\cos\frac{(9-i)\pi}{8},\quad i=5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9.$$

相应非线性方程(4·31)为

$$\begin{cases}a_0+a_2x_5^2+a_4x_5^4+b_2x_5^2\left(-E-\cos\dfrac{1}{4}\pi x_5\right)-E=f(x_5),\\ a_0+a_2x_6^2+a_4x_6^4+b_2x_6^2\left(E-\cos\dfrac{1}{4}\pi x_6\right)+E=f(x_6),\\ a_0+a_2x_7^2+a_4x_7^4+b_2x_7^2\left(-E-\cos\dfrac{1}{4}\pi x_7\right)-E=f(x_7),\\ a_0+a_2x_8^2+a_4x_8^4+b_2x_8^2\left(E-\cos\dfrac{1}{4}\pi x_8\right)+E=f(x_8),\\ a_0+a_2x_9^2+a_4x_9^4+b_2x_9^2\left(-E-\cos\dfrac{1}{4}\pi x_9\right)-E=f(x_9).\end{cases}$$

用 Ремез 算法只须迭代两次，即可得到

$$a_0=1.0000000241,\quad a_2=-0.2874648358,$$
$$a_4=0.0093933390,\quad b_2=0.0209610796.$$

其偏差为 $E=0.241\times10^{-7}$:

$$\cos\frac{\pi}{4}x$$
$$\approx\frac{1.0000000241-0.2874648358x^2+0.0093933390x^4}{1+0.0209610796x^2}.$$

4-5 带权线性方法*

H. L. Loeb 在 1958 年的报告中曾经利用过如下带权线性方法．本来是要用有理分式 $R(C, x)=N(A, x)/D(B, x)$ 去逼近给定函数 $f(x)$．即求 $C=(A, B)$，使 $(D(B, x)>0, 0\leqslant x\leqslant 1)$

$$\left\| \frac{f(x)D(B, x)-N(A, x)}{D(B, x)} \right\|_c = \min.$$

现在把 $1/D(B, x)$ 认为是权函数，而来按下法形成一个序列 $C_k=(A_k, B_k)$，$k=1, 2, \cdots$：设 C_{k-1} 已经求出，而来求解下述极小问题的解 $C_k=(A_k, B_k)$，

$$\max_{0<x<1} \frac{1}{D(B_{k-1}, x)} |f(x)D(B_k, x)-N(A_k, x)| = \min.$$

关于该种算法的理论研究至今尚未见到．

* 可参见参考文献 [63]．

第 3 章

Padé 逼近方法

一个函数的 Taylor 级数展开的系数和该函数值之间的关系问题，既是一个有趣的纯数学问题、又是一个十分重要的实际问题. 它是数学分析这门学科的基本研究课题之一，又是自然科学、特别是物理科学和生物科学中数学模型计算的基础.

我们知道，如果一个 Taylor 级数展开是绝对收敛的，则由它所唯一确定的函数必然任意次可微. 反之，如果一个函数是任意次可微的，则它唯一确定一个 Taylor 级数展开式.

在利用 Taylor 级数展开作实际计算时，往往出现人们所不希望有的限制. 考虑例子:

$$f(x)=\left(\frac{1+2x}{1+x}\right)^{1/2}$$
$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{5}{8}x^2+\frac{13}{16}x^3-\frac{141}{128}x^4+\cdots. \qquad (0\cdot1)$$

显然当 $x>1/2$ 时，上述 Taylor 级数展开式是不成立的. 一个古典的办法是在(0·1)式的基础上计算某一新点 $0<x_0<1/2$ 处的 $f(x)$ 和各阶导数值，以形成新的 Taylor 级数展开. 这种方法虽然有时可以扩大(新的)展开式的适用范围，但必竟仍然不能扩充到 $x=\infty$ 点. 更何况这种方法是十分令人厌烦的. 以下仅以同一函数为例来介绍一种新的变换技巧. 作变换

$$x=w/(1-2w) \text{ 或 } w=x/(1+2x), \qquad (0\cdot2)$$

则

$$f(x(w))=(1-w)^{-1/2}$$

$$=1+\frac{1}{2}w+\frac{3}{8}w^2+\frac{5}{16}w^3+\frac{35}{128}w^4+\cdots, \quad (0\cdot3)$$

在变量代换(0·2)下，点 $x=\infty$ 变为 $w=1/2$. 容易指出 Taylor 级数展开(0·3)于 $w=1/2(x=\infty)$ 是收敛的. $f(\infty)$ 的前几个近似值为

$$1,\ 1.125,\ 1.34375,\ 1.38281,\ 1.39990,\ \cdots, \quad (0\cdot4a)$$

它们收敛到 $\sqrt{2}=1.414\cdots$. 如果把展开式(0·3)换回到变量 x 上来，其前几个近似式为

$$1,\ \frac{1+(5/2)x}{1+2x},\ \frac{1+(9/2)x+(43/8)x^2}{1+2x^2},\cdots, \quad (0\cdot4b)$$

它们是 x 的有理分式函数.

本章中将要研究的 Padé 逼近，乃是一种获得函数有理分式逼近的特殊技巧. 作为例子，我们考虑(0·1)的下列形式的近似式

$$\frac{a+bx}{c+dx}. \quad (0\cdot5)$$

为使(0·5)的展开式与(0·1)式的前三项重合，我们得到近似式

$$\frac{1+(7/4)x}{1+(5/4)x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{5}{8}x^2+\frac{25}{32}x^3-\frac{125}{128}x^4+\cdots. \quad (0\cdot6)$$

当 $x=\infty$ 时，它的近似值为 1.4. 这个结果比(0·4a)中任一结果都要好. 逼近式

$$\frac{1+(13/4)x+(41/16)x^2}{1+(11/4)x+(29/16)x^2} \quad (0\cdot7)$$

的展开式就有前五项与(0·1)式的前五项重合. 当 $x=\infty$ 时，它的值为

$$\frac{41}{29}=1.413793103. \tag{0·8}$$

(0·6)、(0·7)往下的近似式分别给出 $x=\infty$ 处的近似值为

$$1.414201183,\ 1.414213198,\ 1.414213552,\ \cdots. \tag{0·9}$$

(0·9)中给出的第三个近似值是由展开式前十一项与(0·1)的前十一项重合的有理分式(分子、分母各5次)得来的. 它同 $\sqrt{2}$ 的精确值的误差为 10^{-8}.

我们也可以从 Taylor 展开式(0·3)出发来引出相应的有理逼近式

$$1,\ \frac{1-\frac{1}{4}w}{1-\frac{3}{4}w},\ \frac{1-\frac{3}{4}w+\frac{1}{16}w^2}{1-\frac{5}{4}w+\frac{5}{16}w^2},\ \cdots. \tag{0·10}$$

它们依次与(0·3)展开中的前一项, 三项和前五项的系数相重合. (0·10)中各式在 $w=1/2$ 处(对应于 $x=\infty$ 处)的值分别为

$$1,\ 1.4,\ \frac{41}{29},\ \cdots.$$

这些值同关于 x 的 Taylor 级数展开式(0·1)引出的有理逼近式的近似值(见(0·6)～(0·8)式)是相同的. 这是一个有趣的事实. 下面将集中讨论用有理函数来逼近用 Taylor 级数所定义的函数问题.

§1 Padé 逼 近*

设 $f(x)$ 是由下述形式幂级数所定义的函数

$$f(x)=\sum_{j=0}^{\infty}a_jx^j. \tag{1·1}$$

* 可参见参考文献[14].

$f(x)$的 Padé 逼近为

$$[L/M]=P_L(x)/Q_M(x), \tag{1·2}$$

其中 $P_L(x)\in H_L$, $Q_M(x)\in H_M$ 的系数由下列方程所确定

$$f(x)-\frac{P_L(x)}{Q_M(x)}=O(x^{L+M+1}). \tag{1·3}$$

显然当着在分式 $P_L(x)/Q_M(x)$的分子分母上同乘以任一非零常数时，分式的值将不至改变. 因而可假定标准化条件

$$Q_M(0)=1.0. \tag{1·4}$$

并且还假定 $P_L(x)$和 $Q_M(x)$无公共因子存在. 若记

$$\left.\begin{aligned}P_L(x)&=p_0+p_1x+\cdots+p_Lx^L,\\ Q_M(x)&=1+q_1x+\cdots+q_Mx^M,\end{aligned}\right\} \tag{1·5}$$

则以 $Q_M(x)$乘(1·3)式并比较等式两边同次幂系数，可得关于 p_0, p_1, …, p_L; q_1, …, q_M 的线性方程组:

$$\left.\begin{aligned}&a_0=p_0,\\ &a_1+a_0q_1=p_1,\\ &a_2+a_1q_1+a_0q_2=p_2,\\ &\qquad\cdots\cdots\\ &a_L+a_{L-1}q_1+\cdots+a_0q_L=p_L,\\ &a_{L+1}+a_Lq_1+\cdots+a_{L-M+1}q_M=0,\\ &\qquad\cdots\cdots\\ &a_{L+M}+a_{L+M-1}q_1+\cdots+a_Lq_M=0,\end{aligned}\right\} \tag{1·6}$$

其中规定了

$$\left.\begin{aligned}&a_n\equiv0,\quad 若\ n<0;\\ &q_j\equiv0,\quad 若\ j>M.\end{aligned}\right\} \tag{1·7}$$

有些作者，常把$[L/M]$记为$[M, L]$或$[L, M]$，为不至引起混乱，我们只采用记号$[L/M]$. 并且记

$$L+M=N,\ L-M=J. \tag{1·8}$$

顺便需要指出的一点是，如果把我们所作的标准化条件(1·4)改为要求

$$Q_M(x)\not\equiv 0^*, \tag{1·9}$$

则 Padé 逼近的定义将会有所改变. 例如当

$$f(x)=1+x^2+x^4+\cdots$$

且 $L=M=1$ 时，按条件(1·9)，不难指出

$$P_1(x)=Q_1(x)=x,\ P_1(x)/Q_1(x)=1$$

满足

$$Q_M(x)f(x)-P_L(x)=O(x^{N+1}) \tag{1·10}$$

而不满足(1·3)式. 事实上，当采用标准化假定(1·4)时，$P_1(x)=p_0+p_1x$ 和 $Q_1(x)=1+q_1x$ 的系数应该满足线性方程组(1·6)式，即

$$p_0=1,$$
$$0+1\cdot q_1=p_1,$$
$$1+0\cdot q_1=0,$$

而这显然是不可能的.

今后我们将假定标准化条件(1·4)恒成立.

定理 1(Frobenius-Padé 唯一性定理) 形式幂级数 $f(x)$ 的 $[L/M]$ Padé 逼近只要存在，则必唯一.

证明 假定形式幂级数 $f(x)$ 有两个 $[L/M]$ Padé 逼近存在:

$$X(x)/Y(x) \quad 和 \quad U(x)/V(x),$$

其中 $X(x)$、$U(x)\in H_L$，$Y(x)$、$V(x)\in H_M$. 根据条件(1·3)，必有

$$X(x)/Y(x)-U(x)/V(x)=O(x^{L+M+1}). \tag{1·11}$$

今以 $Y(x)\cdot V(x)$ 乘(1·11)式两边，可得

* 这个条件是 Frobenius 和 Padé 原先采用的条件.

$$X(x)V(x)-U(x)Y(x)=O(x^{L+M+1}). \qquad (1\cdot12)$$

可是 $$X(x)V(x)-U(x)Y(x)\in H_{L+M},$$

因此由(1·12)式知其必恒等于零，也即

$$X(x)V(x)\equiv U(x)Y(x). \qquad (1\cdot13)$$

由于 $X(x)$与$Y(x)$互质，$U(x)$与$V(x)$互质且$Y(0)=V(0)=1$，所以$Y(x)$和$V(x)$恒不为零．以$Y(x)\cdot V(x)$通除(1·13)式两边，得

$$\frac{X(x)}{Y(x)}\equiv\frac{U(x)}{V(x)}.$$

定理1得证.

定理2(Jacobi)　设方程组(1·6)非奇异时，Padé 逼近有下述表达式

$$[L/M]=\frac{\det\begin{bmatrix} a_{L-M+1} & a_{L-M+2} & \cdots & a_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_L & a_{L+1} & \cdots & a_{L+M} \\ \sum\limits_{j=M}^{L} a_{j-M}x^j & \sum\limits_{j=M-1}^{L} a_{j-M+1}x^j & \cdots & \sum\limits_{j=0}^{L} a_j x^j \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a_{L-M+1} & a_{L-M+2} & \cdots & a_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_L & a_{L+1} & \cdots & a_{L+M} \\ x^M & x^{M-1} & \cdots & 1 \end{bmatrix}}, \qquad (1\cdot14)$$

其中除假定(1·7)式成立外，当求和号中下指标超过上指标时，规定该和为零.

事实上，若记(1·14)右端分子、分母分别为$u(x)$、$v(x)$，则由行列式性质可直接验明

$$f(x)v(x)-u(x)=O(x^{L+M+1}).$$

采用行列式的消法变换，(1·14)还可化为更紧凑的形式.

事实上，分别将分子、分母两行列式的第 i 列减去第 $i+1$ 列的 x 倍($i=1, \cdots, M$)即可得到

$$[L/M]=\frac{\det\begin{bmatrix} a_{L-M+1}-xa_{L-M+2} & \cdots & a_L-xa_{L+1} & a_{L+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_L-xa_{L+1} & \cdots & a_{L+M-1}-xa_{L+M} & a_{L+M} \\ -a_{L-M+1}x^{L+1} & \cdots & -a_Lx^{L+1} & \sum\limits_{j=0}^{L} a_jx^j \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a_{L-M+1}-xa_{L-M+2} & \cdots & a_L-xa_{L+1} & a_{L+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_L-xa_{L+1} & \cdots & a_{L+M-1}-xa_{L+M} & a_{L+M} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}}. \tag{1·15}$$

现将上式右端分子所示的行列式的第 j 列($j=1, \cdots, M$)的 x^{j-M-1}倍加到第 $M+1$ 列上，则该行列式的第 $M+1$ 列元素依次变成

$$a_{L-M+1}x^{-M}, \ \cdots, \ a_Lx^{-M}, \ \sum_{j=0}^{L-M} a_jx^j.$$

于是

$$[L/M]=\frac{\det\begin{bmatrix} a_{L-M+1}-xa_{L-M+2} & \cdots & a_L-xa_{L+1} & a_{L-M+1}x^{-M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_L-xa_{L+1} & \cdots & a_{L+M-1}-xa_{L+M} & a_Lx^{-M} \\ -a_{L-M+1}x^{L+1} & \cdots & -a_Lx^{L+1} & \sum\limits_{j=0}^{L-M} a_jx^j \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a_{L-M+1}-xa_{L-M+2} & \cdots & a_L-xa_{L+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_L-xa_{L+1} & \cdots & a_{L+M-1}-xa_{L+M} \end{bmatrix}}. \tag{1·16}$$

如果将上式分子按最后一列展开，则可得到

$$[L/M]=\sum_{j=0}^{L-M} a_jx^j+x^{L-M+1}[w^T(L/M)W^{-1}(L/M)w(L/M)], \tag{1·17}$$

其中 $W^{-1}(L/M)$ 是下述矩阵的逆矩阵

$$W(L/M)=\begin{pmatrix} a_{L-M+1}-xa_{L-M+2} & \cdots & a_L-xa_{L+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_L-xa_{L+1} & \cdots & a_{L+M+1}-xa_{L+M} \end{pmatrix},$$

而 $w(L/M)$ 是向量

$$w(L/M)=(a_{L-M+1},\ a_{L-M+2},\ \cdots,\ a_L)^T.$$

若 $j<0$，则取 $a_j\equiv 0$．若 $L<M$，则 $(1\cdot 17)$ 中的 $\sum\limits_{j=0}^{L-M} a_j x^j\equiv 0$．其实 $(1\cdot 17)$ 对于 $M>L+1$ 的情况也是成立的，此时出现 x 的负幂次方项．

采用完全类似的办法，还可得到

$$[L/M]=\sum_{j=0}^{L+n} a_j x^j + x^{L+n+1}[w^T((L+M)/M)W^{-1}(L/M)w((L+n)/M)], \tag{1·18}$$

其中 $0\leqslant n\leqslant M$．

在实际应用时，常把各个 Padé 逼近列成一张所谓 Padé 表：

$$\begin{matrix} [0/0] & [0/1] & [0/2] & [0/3] & [0/4] & \cdots \\ [1/0] & [1/1] & [1/2] & [1/3] & [1/4] & \cdots \\ [2/0] & [2/1] & [2/2] & [2/3] & [2/4] & \cdots \\ [3/0] & [3/1] & [3/2] & [3/3] & [3/4] & \cdots \\ [4/0] & [4/1] & [4/2] & [4/3] & [4/4] & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix} \tag{1·19}$$

上述 Padé 表中的第一列上各元素，恰为原来 Taylor 级数的部分和．

例如 e^x 的 Padé 表可列于下：

表 1·1　e^x 的 Padé 表

L \ M	0	1	2	3	4
0	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{2}{2-2x+x^2}$	$\frac{6}{6-6x+3x^2-x^3}$	$\frac{24}{24-24x+12x^2-4x^3+x^4}$
1	$\frac{1+x}{1}$	$\frac{2+x}{2-x}$	$\frac{6+2x}{6-4x+x^2}$	$\frac{24+6x}{24-18x+6x^2-x^3}$	$\frac{120+24x}{120-96x+36x^2-8x^3+x^4}$
2	$\frac{2+2x+x^2}{1}$	$\frac{6+4x+x^2}{6-2x}$	$\frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2}$	$\frac{60+24x+3x^2}{60-36x+9x^2-x^3}$	$\frac{360+120x+12x^2}{360-240x+72x^2-12x^3+x^4}$
3	$\frac{6+6x+3x^2+x^3}{6}$	$\frac{24+18x+16x^2+x^3}{24-6x}$	$\frac{60+36x+9x^2+x^3}{60-24x+3x^2}$	$\frac{120+60x+12x^2+x^3}{120-60x+12x^2-x^3}$	$\frac{840+360x+60x^2+4x^3}{840-480x+120x^2-16x^3+x^4}$
4	$\frac{24+24x+12x^2+4x^3+x^4}{24}$	$\frac{120+96x+36x^2+8x^3+x^4}{120-24x}$	$\frac{360+240x+72x^2+12x^3+x^4}{360-120x+12x^2}$	$\frac{840+480x+120x^2+16x^3+x^4}{840-360x+60x^2-4x^3}$	$\frac{1680+840x+180x^2+20x^3+x^4}{1680-840x+180x^2-20x^3+x^4}$

表 1·1 中对角线上各 Padé 逼近[1/1]，[2/2]，[3/3]和[4/4]在 $x=1$ 处的值分别为：

$$3,\ \frac{19}{7},\ \frac{193}{71}\quad 和\quad \frac{2721}{1001}.$$

这最后一个近似值 2721/1001 与 e 的误差 $\approx 10^{-8}$.

实践表明，当 $L+M=N$ 为一确定常数值时，也即 Padé

逼近的分子和分母次数的和为一常数值时，只有当 $L=M$(N 为偶数)或 $|L-M|=1$(N 为奇数)时，其精确程度为最好. 例如，在表1·1中，Padé 逼近

$$[2/2]=(12+6x+x^2)/(12-6x+x^2)$$

就比[4/0]，[3/1]，[1/3]和[0/4]为精确.

例　如欲求 $\operatorname{th}\mu x$, $-1\leqslant x\leqslant 1$, $\mu=\frac{1}{2}\ln 3$ 的有理逼近式. 先求 $(\operatorname{th}\mu x)/x$ 的[2/4]级 Padé 逼近 $R_{2,4}(x)$，再以 $xR_{2,4}(x)$ 作为 $\operatorname{th}\mu x$ 的有理逼近式. 作 $(\operatorname{th}\mu x)/x$ 的 Maclaurin 级数

$$\frac{\operatorname{th}\mu x}{x}=\mu-\frac{\mu^3}{3}x^2+\frac{2\mu^5}{15}x^4-\frac{17\mu^7}{315}x^6+\frac{62\mu^7}{2835}x^7-\cdots.$$

与(1·6)相应的方程组为($p_1=q_1=q_3=0$)

$$\begin{cases} p_0=\mu, \\ p_2=-\dfrac{\mu^3}{3}+\mu q_2, \\ \dfrac{2\mu^5}{15}-\dfrac{\mu^3}{3}q_2+\mu q_4=0, \\ -\dfrac{17\mu^7}{315}+\dfrac{2\mu^5}{15}q_2-\dfrac{\mu^3}{3}q_4=0. \end{cases}$$

解之，即得

$$P_2(x)=\mu+\frac{2\mu^3}{21}x^2,$$

$$Q_4(x)=1+\frac{3\mu^2}{7}x^2+\frac{\mu^4}{105}x^4.$$

因此[2/4]Padé 逼近为

$$R_{2,4}(x)=\frac{P_2(x)}{Q_4(x)}=\frac{0.5493061443+0.0157853448x^2}{1+0.1293159601x^2+0.0008670987x^4}.$$

在实际问题中，常以 $P_L(x)-f(x)Q_M(x)$ 的 Maclaurin 展开的第一个非零项作为衡量 $f(x)$ 的 $[L/M]$ Padé 逼近 $P_L(x)/Q_M(x)$ 误差的一个量.

以 $xR_{2,4}(x)$ 逼近 $\operatorname{th}\mu x$ 时，其相对误差函数为

$$\frac{xR_{2,4}(x)-\operatorname{th}\mu x}{\operatorname{th}\mu x}=\frac{1}{Q_4(x)}\times\frac{P_2(x)-Q_4(x)\dfrac{\operatorname{th}\mu x}{x}}{\dfrac{\operatorname{th}\mu x}{x}}.$$

因为 $P_2(x)-Q_4(x)\dfrac{\operatorname{th}\mu x}{x}$ 的 Maclaurin 级数的第一个非零项为 $-\mu^9x^8/99225$. 于是相对误差函数近似为

$$-\frac{\mu^9}{99225}x^8\bigg/\left(Q_4(x)\frac{\operatorname{th}\mu x}{x}\right).$$

因为当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$Q_4(x)\geqslant 1\quad 且\quad \frac{\operatorname{th}\mu x}{x}\geqslant\operatorname{th}\mu,$$

所以在 $[-1,1]$ 上有

$$\left|\frac{-\dfrac{\mu^9}{99225}x^8}{Q_4(x)\dfrac{\operatorname{th}\mu x}{x}}\right|\leqslant\frac{\mu^9}{99225\operatorname{th}\mu}=0.9177\cdots\times10^{-7}<0.918\times10^{-7}.$$

若不作近似替代，其相对误差界为 0.713×10^{-7}.

Padé 于 1892 年曾经给出下述定义:

定义 幂级数(1·1)和由它组成的 Padé 表说是正规的(Normal)，如果对一切 $\lambda、\mu\geqslant 0$，恒有

$$C(\lambda/\mu)=\det\begin{vmatrix}a_{\lambda-\mu+1} & a_{\lambda-\mu+2} & \cdots & a_\lambda\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_\lambda & a_{\lambda+1} & \cdots & a_{\lambda+\mu-1}\end{vmatrix}\neq 0. \quad (1\cdot20)$$

Padé 曾经指出，并非每个函数的 Padé 逼近都存在. 然

16. United States v. Imperial Chemical Industries, 100 F. Supp. 504 (SDNY 1951); United States v. The Watchmakers of Switzerland Information Center, Inc., 1963 Trade Cases Section 70,600 (SNDY 1962); Continental Ore Co. v. Union Carbide & Carbon Corp., 370 U.S. 690, 82 S. Ct. 1404, 8 L. Ed. 777 (1962); De Beers Consolidated Mines v. United States, 65 S. Ct. 1130, 325 U.S. 212, 89 L. Ed. 1966 (NY 1945); United States v. National Lead Co., 63 F. Supp, 513 (DCNY 1945), aff. 67 S Ct. 1634, 332 U.S. 319, 91 L. Ed. 1438; United States v. Sisal Sales Corp., 47 S. Ct. 592, 274 U.S. 268, 71 L. Ed. 1042 (NY 1927); Branch v. Federal Trade Commission, 141 F. 2d 31 (7th Cir., 1944); Steele v. Bulova Watch Co. 344 U.S. 280, 73 S. Ct. 252, 97 L. Ed. 319 (1952); Vanity Fair Mills Inc. v. T. Eaton Co., 234 F. 2d 633 (2nd Cir., 1956); cert. den. 352 U.S. 871, 77 S. Ct. 96, 1 L. Ed. 76; United States v. Standard Oil Co., Trade Cases Section 70, 8119 (SNDY 1963); Occidental Petroleum Corp. v. Buttes Gas and Oil, 331 F. Supp. 92 (CD Cal. 1971); aff. 461 F. 2d 1216 (9th Cir., 1972); cert. den. 409 U.S. 950 (1972); United States v. Bechtel Corp., Civil no. C76-99 (ND Cal. 1976), consent decree, *International Legal Materials* (January 1977), vol. 16 p. 97; United States v. Alkali Export Ass'n, 86 F. Supp. 59 (DCNY 1949); Interamerican Refining Corp. v. Texaco Maracaibo Inc., 307 F. Supp. 1291 (DC. Del 1970); United States v. General Electric Co., 92 F. Supp. 753 (NJ 1949).

17. The Netherlands, Great Britain, France, Switzerland and others. See Becker, "The Antitrust Laws and Relations with Foreign Nations," New York State Bar Association, Section on Antitrust Law, Proceedings, pp. 41, 58; See also Haight, International Law Association, Report of the 51st Conference, Tokyo (1965), pp. 565-592.

18. International Law Association, Report of the 55th Conference, New York (1972), published in 1974, "Extra-territorial Application of Restrictive Trade Legislation," art. 6, p. 175.

19. Ibid., p. 113.

20. OECD, *Guide to Legislation on Restrictive Business Practices* (1976), 4th ed.; for example Germany and the EEC.

21. 288 F. 2d 545 (9th Cir., 1961).

22. 375 F. 2d 882 (5th Cir., 1967).

23. Supra n. 18, art. 5, p. 174.

24. District Court of Jerusalem, Judgement of 11 December 1961; *American Journal of International Law* (1962), vol. 56, p. 805.

25. Case of the S.S. Lotus, PCIJ, Series A, no. 10 (1927).

26. District Court of Jerusalem, Judgement of 11 December 1961, supra n. 24.

27. International Law Association, supra n. 18, Art. 3, p. 174.

28. PCIJ, Series A, no. 10 (1927).

29. International Law Association, supra n. 18.

30. Ibid., art. 4, p. 174.

31. Ibid, p. 171.

32. Court of Justice of the European Communities, especially cases 48/69, 52/69 and 53/69 (1972).

33. International Law Association, supra n. 18.

34. "Extra-territorial Application of Law – General Principles," Pro-

$$\frac{A+B[P_M(x)/Q_M(x)]}{C+D[P_M(x)/Q_M(x)]} \tag{1·21}$$

是 $\{A+Bf(x)\}/\{C+Df(x)\}$ 的 $[M/M]$Padé 逼近式.

证明 于分式(1·21)的分子分母同乘以 $Q_M(x)$，则它变成 $p_M(x)/q_M(x)$ 的形式. 由(1·3)、(1·4)以及假设条件，可知

$$q_M(0)=CQ_M(0)+DP_M(0)=C+Df(0)\neq 0.$$

因为(1·21)的幂级数展开与 $\{A+Bf(x)\}/\{C+Df(x)\}$的幂级数展开间仅差 $O(x^{2M+1})$. 于是由(1·3)和唯一性定理1，可知定理5成立.

下面定理指出 Padé 逼近在 Euler 变换下是不变的.

定理 6(Edrei-Baker) 设 $P_M(x)/Q_M(x)$是 $f(x)$ 的 $[M/M]$Padé 逼近，则

$$P_M(Ay/(1+By))/Q_M(Ay/(1+By)) \tag{1·22}$$

是 $f(Ay/(1+By))$的 $[M/M]$Padé 逼近.

事实上，只须把(1·22)的分子、分母同乘以$(1+By)^M$，则该分式的分子、分母的一般项为

$$[Ay/(1+By)]^j(1+By)^M=(Ay)^j(1+By)^{M-j},$$

它是一个 M 阶多项式. 因而此时(1·22)式变为$p_M(y)/q_M(y)$，其中 $p_M(y)$，$q_M(y)\in H_M$. 如果把$p_M(y)/q_M(y)$展成 y 的幂级数，其中用到 P_M/Q_M 和$(1+By)^{-j}$的展开式，则不难发现这个幂级数与$f(Ay/(1+By))$的幂级数展开式中 y^{2M} 项以前各项和是一致的. 所以由唯一性定理1，可知 $p_M(x)/q_M(x)$ 是所求的 Padé 逼近. 定理6证完.

由定理6和定理5，显然可知下述不变性定理成立.

定理 7(不变性定理) 设 $P_M(x)/Q_M(x)$是 $f(x)$的$[M/M]$ Padé 逼近，且 $C+Df(0)\neq 0$，则

$$\frac{A+B\left[P_M\left(\frac{\alpha y}{1+\beta y}\right)\Big/Q_M\left(\frac{\alpha y}{1+\beta y}\right)\right]}{C+D\left[P_M\left(\frac{\alpha y}{1+\beta y}\right)\Big/Q_M\left(\frac{\alpha y}{1+\beta y}\right)\right]}$$

是函数

$$\{A+Bf[\alpha y/(1+\beta y)]\}/\{C+Df[\alpha y/(1+\beta y)]\}$$

的 $[M/M]$ Padé 逼近.

§2 Padé 逼近的递推算法

实际计算 Padé 逼近式的方法有许多. 例如, 可以直接求解线性方程组(1·6), 或者利用(1·16)、(1·17)去求解等等. 显然, 这样一些算法仅当 L 和 M 较小时才真正是可行的. 本节中, 我们将介绍 Padé 逼近计算中的一类递推算法.

作为一种准备, 下面先介绍 Sylvester 行列式恒等式. 设 M 是一个 $n\times n$ 矩阵, f 和 c 是 $1\times n$ 矩阵, h 和 g 是 $n\times 1$ 矩阵. 考虑矩阵

$$A=\begin{pmatrix} M & h & g \\ f & e & d \\ c & b & a \end{pmatrix},$$

其中 a, b, d 和 e 是数. 由行列式的运算性质可知

$$\det A\cdot\det M=\begin{vmatrix} M & h & g & 0 \\ f & e & d & 0 \\ c & b & a & c \\ 0 & 0 & 0 & M \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} M & h & g & 0 \\ f & e & d & 0 \\ c & b & a & c \\ M & h & g & M \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} M & h & g & 0 \\ f & e & d & 0 \\ 0 & b & a & c \\ 0 & h & g & M \end{vmatrix}.$$

今对最右端的行列式的前 $n+1$ 行作 Laplace 展开，可得

$$\det A\cdot\det M=\begin{vmatrix}M & h\\ f & e\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a & c\\ g & M\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}M & g\\ f & d\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b & c\\ h & M\end{vmatrix}.$$

若记 $A_{r_1,\cdots,r_t;s_1,\cdots,s_u}$ 为在矩阵 A 中删去 $r_1, \cdots, r_t$ 行，删去 $s_1, \cdots, s_u$ 列所得到的子矩阵，则上式又可记为

$$\det A\cdot\det A_{n+1,n+2;n+1,n+2}$$
$$=\det A_{n+2;n+2}\cdot\det A_{n+1;n+1}-\det A_{n+2;n+1}\cdot\det A_{n+1;n+2}. \quad (2\cdot1)$$

因为一个行列式中，既不在同一行，又不在同一列的任意两个元素都可以用换行、换列的变换方法换到对角线的位置 $(n+1, n+1)$ 和 $(n+2, n+2)$ 上（符号可能变化）. 所以由 (2·1) 还可以推知下述 Sylvester 行列式恒等式

$$\det A\cdot\det A_{r,s;p,q}$$
$$=\det A_{r;p}\cdot\det A_{s;q}-\det A_{r;q}\cdot\det A_{s;p}. \quad (2\cdot2)$$

下面我们回过头来研究 Padé 逼近的递推算法.

先介绍所谓两项恒等式. 按上节(1·3)式，可知

$$\begin{aligned}&f(x)-P_L^{(J)}(x)/Q_M^{(J)}(x)=O(x^{L+M+1}),\\&f(x)-P_{L+1}^{(J)}(x)/Q_M^{(J)}(x)=O(x^{L+M+3}),\end{aligned} \quad (2\cdot3)$$

此处 $J=L-M$ 如(1·8)式所示.

将(2·3)中上、下两式相减，并乘以 $Q_M^{(J)}(x)\cdot Q_{M+1}^{(J)}(x)$，于是可得

$$P_{L+1}^{(J)}(x)\cdot Q_M^{(J)}(x)-P_L^{(J)}(x)\cdot Q_{M+1}^{(J)}(x)=O(x^{L+M+1}). \quad (2\cdot4)$$

因为(2·4)式左端为次数不超过 $L+M+1$ 的多项式，所以(2·2)式恰好有一项 $\alpha\cdot x^{L+M+1}$. 由(1·14)和正规化条件 $Q_M^{(J)}(0)=C(L/M)$（其中 $C(L/M)$ 如(1·20)所定义），其实还可以算出该项系数为

$$-C(L+1/M+2)\cdot C(L+1/M)$$
$$+C(L/M+1)\cdot C(L+2/M+1), \qquad (2\cdot5)$$

因为 $P_L^{(J)}(x)$ 中 x^L 系数为 $(-1)^M C(L/M+1)$，而 $Q_M^{(J)}(x)$ 中 x^M 系数为 $(-1)^M C(L+1/M)$. 按 Sylvester 行列式恒等式，我们可以重新表示(2·5)式，而得到

$$\frac{P_{L+1}^{(J)}(x)}{Q_{M+1}^{(J)}(x)}-\frac{P_L^{(J)}(x)}{Q_M^{(J)}(x)}=\frac{[C(L+1/M+1)]^2x^{L+M+1}}{Q_{M+1}^{(J)}(x)\cdot Q_M^{(J)}(x)}. \qquad (2\cdot6)$$

按完全相同的方法，我们还可以得到其它一些两项恒等式. 如

$$\begin{aligned}&\frac{P_{L+1}^{(J+1)}(x)}{Q_M^{(J+1)}(x)}-\frac{P_L^{(J)}(x)}{Q_M^{(J)}(x)}\\&\quad=\frac{C(L+1/M)C(L+1/M+1)x^{L+M+1}}{Q_M^{(J+1)}(x)Q_M^{(J)}(x)},\\&\frac{P_L^{(J-1)}(x)}{Q_{M+1}^{(J-1)}(x)}-\frac{P_L^{(J)}(x)}{Q_M^{(J)}(x)}\\&\quad=\frac{C(L/M+1)C(L+1/M+1)x^{L+M+1}}{Q_{M+1}^{(J-1)}(x)Q_M^{(J)}(x)},\end{aligned} \qquad (2\cdot7)$$

$$\begin{aligned}&\frac{P_L^{(J-1)}(x)}{Q_{M+1}^{(J-1)}(x)}-\frac{P_{L+1}^{(J+1)}(x)}{Q_M^{(J+1)}(x)}=\frac{[C(L+1/M+1)]^2x^{L+M+2}}{Q_{M+1}^{(J-1)}(x)\cdot Q_M^{(J+1)}(x)},\\&\frac{P_{L+1}^{(J+1)}(x)}{Q_M^{(J+1)}(x)}-\frac{P_{L-1}^{(J-1)}(x)}{Q_M^{(J-1)}(x)}\\&\quad=\frac{\left\{\begin{array}{l}C(L/M+1)C(L+1/M)x^{L+M}\\+C(L/M)C(L+1/M+1)x^{L+M+1}\end{array}\right\}}{Q_M^{(J+1)}(x)\cdot Q_M^{(J-1)}(x)},\end{aligned} \qquad (2\cdot8)$$

和

$$\frac{P_L^{(J-1)}(x)}{Q_{M+1}^{(J-1)}(x)}-\frac{P_L^{(J+1)}(x)}{Q_{M-1}^{(J+1)}(x)}=\frac{\left\{\begin{array}{l}C(L/M+1)C(L+1/M)x^{L+M}\\-C(L/M)C(L+1/M+1)x^{L+M+1}\end{array}\right\}}{Q_{M+1}^{(J-1)}(x)\cdot Q_{M-1}^{(J+1)}(x)}. \qquad (2\cdot9)$$

利用两项恒等式，可以建立交比恒等式. 所谓交比，乃指下列形式的比式

$$\frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}=R, \tag{2·10}$$

其中 z_1, z_2, z_3 和 z_4 在分子、分母中皆出现一次.

当 z_1, z_2, z_3 和 z_4 是 Padé 表中四个相邻的 Padé 逼近时，我们来计算交比值(2·10). 当它们如图 2·1 所示时，由恒等式(2·7)就能够写出

$$\frac{\{[L/M]-[L/M+1]\}\cdot\{[L+1/M]-[L+1/M+1]\}}{\{[L/M]-[L+1/M]\}\cdot\{[L/M+1]-[L+1/M+1]\}}$$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{l}\{-C(L/M+1)C(L+1/M+1)x^{L+M+1}\}\\ \cdot\{-C(L+1/M+1)C(L+2/M+1)x^{L+M+2}\}\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l}\{-C(L+1/M)C(L+1/M+1)x^{L+M+1}\}\\ \cdot\{-C(L+1/M+1)C(L+1/M+2)x^{L+M+2}\}\end{array}\right\}}$$

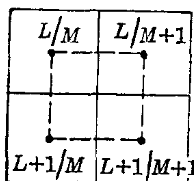
$$=\frac{C(L/M+1)C(L+2/M+1)}{C(L+1/M)C(L+1/M+2)}=\text{const}. \tag{2·11}$$

对于图 2·2 所示的情况，由(2·8)和(2·7)可推得

$$\frac{\{[L/M]-[L+1/M+1]\}\cdot\{[L+1/M]-[L/M+1]\}}{\{[L/M]-[L/M+1]\}\cdot\{[L+1/M]-[L+1/M+1]\}}$$

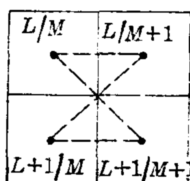
$$=\frac{[C(L+1/M+1)]^2x}{C(L/M+1)C(L+2/M+1)}\propto x^*. \tag{2·12}$$

由(2·11)和(2·12)，可知

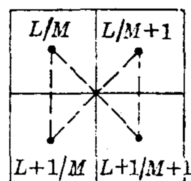


(公式(2·11))

图 2·1



(公式(2·12))



(公式(2·13))

图 2·2

* $y\propto x$ 表示 y 与 x 成正比.

$$\frac{\{[L/M]-[L+1/M+1]\}\cdot\{[L+1/M]-[L/M+1]\}}{\{[L/M]-[L+1/M]\}\cdot\{[L/M+1]-[L+1/M+1]\}}$$

$$=\frac{[C(L+1/M+1)]^2x}{C(L+1/M)C(L+1/M+2)}\propto x. \tag{2·13}$$

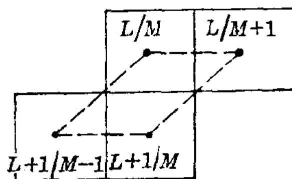
对于图 2·3 所示的情况，有

$$\frac{\{[L/M]-[L+1/M-1]\}\cdot\{[L/M+1]-[L+1/M]\}}{\{[L/M]-[L/M+1]\}\cdot\{[L+1/M-1]-[L+1/M]\}}$$

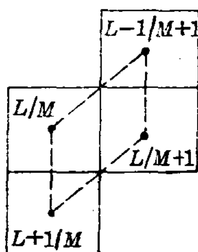
$$=\frac{C(L+1/M)C(L+1/M+1)x}{C(L/M+1)C(L+2/M)}\propto x, \tag{2·14}$$

$$\frac{\{[L/M]-[L-1/M+1]\}\cdot\{[L+1/M]-[L/M+1]\}}{\{[L/M]-[L+1/M]\}\cdot\{[L-1/M+1]-[L/M+1]\}}$$

$$=\frac{C(L/M+1)C(L+1/M+1)x}{C(L+1/M)C(L/M+2)}\propto x. \tag{2·15}$$



(公式(2·14))



(公式(2·15))

图 2·3

从交比恒等式和两项恒等式，我们可以推导 Padé 逼近的三项恒等式. 假设从(2·10)中解出 z_1，则得

$$z_1=\frac{z_2(z_3-z_4)-z_3(z_2-z_4)R}{(z_3-z_4)-(z_2-z_4)R}. \tag{2·16}$$

如果把 $z_i(i=1, 2, 3, 4)$ 代之以 Padé 逼近

$$z_i=P_i/Q_i,\ \ i=1, 2, 3, 4,$$

则从(2·16)得到

$$\frac{P_1}{Q_1}=\frac{P_2(P_3Q_4-Q_3P_4)-P_3(P_2Q_4-P_4Q_2)R}{Q_2(P_3Q_4-Q_3P_4)-Q_3(P_2Q_4-P_4Q_2)R}. \tag{2·17}$$

利用两项恒等式，可知上式括号中的量是一个简单幂函数．并且只要适当选取 $z_i=P_i/Q_i$(如(2·11)～(2·15))，则 R 也是一个简单幂函数．于是只要将(2·17)右端分子、分母同乘以某个公共因子，则可将之正规化．这样就可得到 $P_i(x)$ 和 $Q_i(x)$ 都满足的具有简单系数的三项递推关系式．当 S 取作 $P_i(x)$ 或者 $Q_i(x)$ 时，Baker[14] 给出了下述 Frobenius 星形（或方形）恒等式：

$$S(L+1/M)S(L-1/M)-S(L/M+1)S(L/M-1)=S(L/M)^2. \tag{2·18}$$

在本书第五章§8中，我们还导出了 Wynn([83]) 恒等式

$$\frac{1}{[L+1/M]-[L/M]}+\frac{1}{[L-1/M]-[L/M]}=\frac{1}{[L/M+1]-[L/M]}+\frac{1}{[L/M-1]-[L/M]}. \tag{2·19}$$

它反映了 Padé 表中以 $[L/M]$ 为中心的十字架上5项之间的相互关系．当 Padé 表中前两列已经算出的情况下，我们可以直接采用 Wynn 恒等式(2·19)而依次算出以后各列来．

有了这些恒等式以后，下面进一步来讨论 Padé 逼近的递推算法问题．

首先考虑确定点处 Padé 逼近值的计算问题．在这方面，Shanks-Wynn 的 ε–算法和 Bauer 的 η–算法是特别有效的．有关 ε–算法，我们将在第五章§8中专门介绍．这里只介绍 F. L. Bauer 的 η–算法(参见[42])．

设形式幂级数为

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots,\ a_0=1.$$

η–算法是形成这样一张 η–数组：

且

$$\eta_0^{(m)}=\infty,\quad \eta_1^{(m)}=a_m,$$

$$\eta_{2n+1}^{(m)}+\eta_{2n}^{(m)}=\eta_{2n}^{(m+1)}+\eta_{2n-1}^{(m+1)},\tag{2·20}$$

$$\frac{1}{\eta_{2n+2}^{(m)}}+\frac{1}{\eta_{2n+1}^{(m)}}=\frac{1}{\eta_{2n+1}^{(m+1)}}+\frac{1}{\eta_{2n}^{(m+1)}}$$

由此可以写成一张 η-阵列:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & \eta_1^{(0)} & & & & \\
\eta_0^{(1)} & & \eta_2^{(0)} & & & \\
 & \eta_1^{(1)} & & \eta_3^{(0)} & & \\
\eta_0^{(2)} & & \eta_2^{(1)} & & \eta_4^{(0)} & \\
 & \eta_1^{(2)} & & \eta_3^{(1)} & & \eta_5^{(0)} \\
\eta_0^{(3)} & & \eta_2^{(2)} & & \eta_4^{(1)} & \\
 & \eta_1^{(3)} & & \eta_3^{(2)} & \vdots & \\
\eta_0^{(4)} & & \eta_2^{(3)} & \vdots & & \\
\vdots & \eta_1^{(4)} & \vdots & & & \\
 & \vdots & & & &
\end{array}$$

它的第一、二列可由初始值给出,而第三列以后各列都可按递推关系(2·20)所给出的菱形法则逐一算出.

关于 η-算法和 Padé 逼近的关系,有

定理 8(Bauer) 若所指的量都存在,则

$$\eta_{2n+1}^{(m)}=\frac{\det(\Delta^{i+j}a_m)_{i,j=0}^{n}\cdot\det(\Delta^{i+j}a_{m+1})_{i,j=0}^{n-1}}{\det(\Delta^{i+j+1}a_m)_{i,j=0}^{n-1}\cdot\det(\Delta^{i+j+1}a_{m+1})_{i,j=0}^{n-1}},$$

$$\eta_{2n+2}^{(m)}=\frac{\det(\Delta^{i+j}a_m)_{i,j=0}^{n}\cdot\det(\Delta^{i+j}a_{m+1})_{i,j=0}^{n}}{\det(\Delta^{i+j+1}a_m)_{i,j=0}^{n}\cdot\det(\Delta^{i+j+1}a_{m+1})_{i,j=0}^{n-1}},\tag{2·21}$$

$$[m+n/n]_{x=1}=\sum_{k=0}^{m-1}\eta_1^{(k)}+\sum_{k=0}^{2n+1}\eta_k^{(m)},$$

$$[m+n/n+1]_{x=1}=\sum_{k=0}^{m-1}\eta_1^{(k)}+\sum_{k=0}^{2n+2}\eta_k^{(m)}.\tag{2·22}$$

有关证明请参阅文献[42].

公式(2·22)给出了由 η-阵列产生 Padé 逼近式于 $x=1$ 处值的一种计算格式. 这种算法是容易在计算机上实现的.

以下将给出 Baker 关于一般 Padé 逼近的递推算法. 其具体计算公式为

$$[N-j/j]=\frac{\eta_{2j}(x)}{\theta_{2j}(x)}, \quad [N-j-1/j]=\frac{\eta_{2j+1}(x)}{\theta_{2j+1}(x)}, \qquad (2\cdot23)$$

其中$\{\eta_i(x)\}$和$\{\theta_i(x)\}$有递推公式

$$\begin{aligned} &\eta_0(x)=\sum_{k=0}^{N}a_k x^k, \quad \theta_0(x)=1;\\ &\eta_1(x)=\sum_{k=0}^{N-1}a_k x^k, \quad \theta_1(x)=1; \end{aligned} \qquad (2\cdot24)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\eta_{2j}(x)}{\theta_{2j}(x)}=\frac{(\bar\eta_{2j-1}\eta_{2j-2}(x)-x\bar\eta_{2j-2}\eta_{2j-1}(x))/\bar\eta_{2j-1}}{(\bar\eta_{2j-1}\theta_{2j-2}(x)-x\bar\eta_{2j-2}\theta_{2j-1}(x))/\bar\eta_{2j-1}},\\ &\frac{\eta_{2j+1}(x)}{\theta_{2j+1}(x)}=\frac{(\bar\eta_{2j}\eta_{2j-1}(x)-\bar\eta_{2j-1}\eta_{2j}(x))/(\bar\eta_{2j}-\bar\eta_{2j-1})}{(\bar\eta_{2j}\theta_{2j-1}(x)-\bar\eta_{2j-1}\theta_{2j}(x))/(\bar\eta_{2j}-\bar\eta_{2j-1})}, \end{aligned} \qquad (2\cdot25)$$

$\bar\eta_j$为$\eta_j(x)$的最高次方项$x^{N-\left[\frac{1}{2}(j+1)\right]}$的系数. 上式中之所以要除以$\bar\eta_{2j-1}$和$\bar\eta_{2j}-\bar\eta_{2j-1}$，是为了保证正规化条件$Q_j(0)=1$能够成立.

§3 Padé 逼近的应用举例

Padé 逼近具有十分广泛的应用. 特别是在理论物理的研究中, Padé 逼近是一种相当有力的工具. 由于本丛书中有徐献瑜教授关于 Padé 逼近的专门著作，本节我们仅就 Padé 逼近的两个方面的有趣应用作一简要介绍.

3-1 Z变换的 Padé 逼近——Prony 方法

Prony 方法是一种获得指数型非线性逼近的方法. 亦即在已知$2n$个型值

$$f_a(iT)=f_i, \quad i=0, 1, \cdots, 2n-1 \qquad (3\cdot1)$$

的情况下，确定形如

$$f_a(t)=\sum_{j=1}^{n}A_j e^{s_j t} \qquad (3\cdot2)$$

逼近式中的 $2n$ 个参数 $A_1, \cdots, A_n; s_1, \cdots, s_n$ 的一种方法，其中 T 为步长.

引入新的变量

$$z_j = e^{s_j T}, \quad j=1, \cdots, n$$

和相关的变量 α_i,

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i z^i = (z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n), \quad \alpha_n = 1. \qquad (3\cdot3)$$

这样一来，为使由(3·2)式所示函数满足插值条件(3·1)，即等价于要求

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} A_j z_j^i, \quad i=0, 1, \cdots, 2n-1. \qquad (3\cdot4)$$

由(3·3)和(3·4)，可得

$$\sum_{i=0}^{n} f_{k+i}\alpha_i = \sum_{i=0}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{n} A_j z_j^{k+i}\right\}\alpha_i$$

$$= \sum_{j=1}^{n} A_j z_j^k \left\{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i z_j^i\right\} = 0, \quad k=0, 1, \cdots, n-1. \qquad (3\cdot5)$$

因为 $\alpha_n = 1$，于是上述方程组可改写为

$$\sum_{i=0}^{n-1} f_{k+i}\alpha_i = -f_{k+n}, \quad k=0, 1, \cdots, n-1. \qquad (3\cdot6)$$

从上式解出未知的 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$，然后根据(3·3)式，去求解代数方程式

$$z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0,$$

得到它的 n 个根 $z_1, z_2, \cdots, z_n$. 然后按公式

$$s_j = \frac{1}{T}\log z_j, \quad j=1, 2, \cdots, n \qquad (3\cdot7)$$

即可确定(3·2)式中的指数 s_j. 最后再由(3·4)中前 n 个方程组成的方程组解出(3·2)式中的各个系数 $A_1, A_2, \cdots, A_n$. 这就是熟知的 Prony 方法.

下面我们来说明，Prony 方法从实质上来说，与某相应

Z 变换的 Padé 逼近是相通的.

今考虑 $f(t)$ 的 Z 变换

$$F^s(z)=f_0+f_1z^{-1}+\cdots+f_{2n-1}z^{-(2n-1)}+\cdots. \tag{3.8}$$

因为 e^{s_jt} 的 Z 变换为

$$\mathscr{Z}\{e^{s_jt}\}=\frac{z}{z-e^{s_jT}}=\frac{z}{z-z_j},$$

所以由(3·2)所给出的 $f_\alpha(t)$ 的 Z 变换应具有

$$F^s_\alpha(z)=\frac{a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z}{z^n+\alpha_{n-1}z^{n-1}+\cdots+\alpha_1z+\alpha_0} \tag{3.9}$$

的形式. 今欲使由(3·9)所示的有理公式 $F^s_\alpha(z)$ 恰好是(3·8)中 $F^s(z)$ 的 Padé 逼近, 即

$$\begin{aligned}a_nz^n&+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z\\&=(z^n+\alpha_{n-1}z^{n-1}+\cdots+\alpha_1z+\alpha_0)(f_0+f_1z^{-1}+\cdots\\&\quad+f_{2n-1}z^{-(2n-1)}+\cdots).\end{aligned}$$

比较从 z^n 到 $z^{-(n-1)}$的各同次幂的系数, 可得 $2n$ 个方程组成的线性方程组:

$$\begin{cases}f_0=a_n,\\f_0\alpha_{n-1}+f_1=a_{n-1},\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\f_0\alpha_1+f_1\alpha_2+\cdots+f_{n-2}\alpha_{n-1}+f_{n-1}=a_1,\end{cases} \tag{3.10}$$

$$\begin{cases}f_0\alpha_0+f_1\alpha_1+\cdots+f_{n-1}\alpha_{n-1}+f_n=0,\\f_1\alpha_0+f_2\alpha_1+\cdots+f_n\alpha_{n-1}+f_{n+1}=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\f_{n-1}\alpha_0+f_n\alpha_1+\cdots+f_{2n-2}\alpha_{n-1}+f_{2n-1}=0.\end{cases} \tag{3.11}$$

显然, (3·11)和(3·5)是完全一样的. 因此在 Padé 逼近式(3·9)中的 $\{\alpha_i\}$ 以及由此而确定的 $\{z_j\}$, $\{s_j\}$ 等恰好是 Prony 方法中所要求的那些量. 因为

$$\mathscr{Z}\left\{\sum_{j=1}^{n}A_je^{s_jt}\right\}=\sum_{j=1}^{n}\frac{A_jz}{z-z_j}$$

所以在从(3·11)中解出各 α_j 的基础上，由 (3·10) 求出各 a_j. 然后形成(3·9)中的 $F_\alpha^s(z)$，再根据恒等式

$$\frac{1}{z}F_\alpha^s(z)=\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{z-z_j}, \tag{3·12}$$

最后求出各个系数 $A_1, A_2, \cdots, A_n$.

以上分析说明，Prony 方法从实质上说，确实可以作为某函数 Z 变换的 Padé 逼近来实现.

例 1 设 $f(t)$ 是单位方形脉冲

$$f(t)=\begin{cases}1, & \text{当 } 0\leqslant t<1,\\ 1/2, & \text{当 } t=1,\\ 0, & \text{其它处}.\end{cases}$$

若选择 $n=3$, $T=1/3$, 则型值点为

$$j=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,$$

$$f_j=1,\ 1,\ 1,\ 1/2,\ 0,\ 0.$$

于是

$$F_\alpha^s(z)=\frac{a_3z^3+a_2z^2+a_1z}{z^3+\alpha_2z^2+\alpha_1z+\alpha_0}$$

$$=1+z^{-1}+z^{-2}+\frac{1}{2}z^{-3}+f_6z^{-6}+\cdots,$$

而相应的(3·11)方程组为

$$\begin{cases}\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2=-\dfrac{1}{2},\\ \alpha_0+\alpha_1+\dfrac{1}{2}\alpha_2=0,\\ \alpha_0+\dfrac{1}{2}\alpha_1=0.\end{cases}$$

其解为

$$\alpha_0=-1/2,\quad \alpha_1=1,\quad \alpha_2=-1. \tag{3·13}$$

$F_\alpha^s(z)$ 的分母 $z^3-z^2+z-1/2$ 的零点为

$$z_1=0.64780,\quad z_{2,3}=0.17610\pm i0.86072.$$

根据前面的公式，$f_\alpha(t)$的指数是

$$s_1=-1.30254,\ s_{2,3}=-0.38847\pm i4.10697.$$

以(3·13)的结果代入(3·10)，得到

$$a_3=1,\ a_2=0,\ a_1=1.$$

所以

$$\frac{1}{z}F_\alpha^3(z)=\frac{z^2+1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}.$$

将其表示成分部分式，得

$$A_1=1.47367,\ A_{2,3}=-0.23683\mp i0.07480.$$

所以

$$\begin{aligned}f_\alpha(t)&=1.47367\cdot e^{-1.30254t}+2\mathrm{Re}\{(-0.23683-i0.07480)\\&\quad\times e^{t(-0.38847+i4.10697)}\}\\&=1.47367e^{-1.30254t}-0.49674\cdot e^{-0.38847t}\\&\quad\times\cos(4.10697t+0.30592).\end{aligned}$$

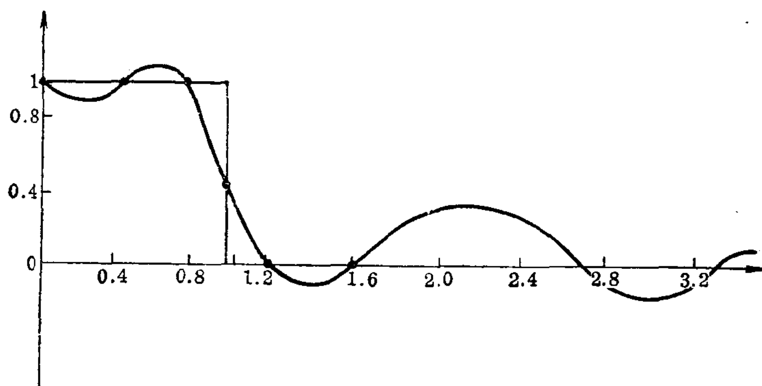


图 3·1 单位方形脉冲的 Prony 逼近

3-2 数值积分的 Padé 逼近方法

定积分

$$I=\int_a^b f(x)dx \tag{3·14}$$

的数值计算方法中，大量的计算公式都是线性的．即用被积函数 $f(x)$ 某些值的线性组合来逼近：

$$I \approx w_1 \cdot f(x_1) + w_2 \cdot f(x_2) + \cdots + w_n \cdot f(x_n), \qquad (3 \cdot 15)$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [a, b]$，$w_1, w_2, \cdots, w_n$ 称为权系数．有时也同时把函数 $f(x)$ 的确定阶导数的线性组合考虑进去．

在许多情况下，线性逼近方法已经可以给出很好的结果．然而当 $f(x)$ 有奇点时，线性方法就不能令人满意了．为了解决这个矛盾，迄今已有一些方法是专门为此而设计的．诸如采用变量替换和分部积分等方法来处理带奇点的积分计算问题．

本段中，我们将从 Padé 逼近的技巧出发，来考虑数值积分的非线性技巧．即用被积函数 $f(x)$ 及其导函数在某些离散点集上的值的非线性组合来逼近积分 I．这里介绍的是基于 Padé 逼近的非线性技巧．

这里又可分成两类方法：

I．直接方法

该方法的大意如下：设

$$r(x) = p(x)/q(x)$$

为 $f(x)$ 的 $[m/n]$ Padé 逼近，则把积分值

$$I_r = \int_a^b r(x)\,dx$$

作为 I 的近似值．当然，一般说来 I_r 的值仍然可能并不是容易求得的．如果 $r(x)$ 的极点是已知的，则采用分项分式的方法可以简化计算．但这种方法因为常会遇到较多的困难，所以实际上我们并不怎么采用它．

II．非直接方法

设 $$y(x)=\int_a^x f(t)\,dt,$$

则 $I=y(b)$. 如果于 $[a, b]$ 上 $f(x)$ Riemann 可积, 则 $y(x)$ 于 $[a, b]$ 上连续. 如果 $f(t)$ 于 $x\in[a, b]$ 连续, 则 $y(x)$ 于 x 点可微, 且

$$y'(x)=f(x).$$

这样一来, I 的计算问题就可转化为初值问题

$$\begin{cases} y'(x)=f(x), \\ y(a)=0 \end{cases} \tag{3·16}$$

的解 $y(x)$ 于 $x=b$ 处的值的计算问题.

设 $x_i=a+ih$, $i=0, 1, \cdots, M$; M 为一正整数, 且 $h=(b-a)/M$. 又设 $y_0=y(a)$, 且当 $i>0$ 时 $y(x_i)$ 的近似值记为 y_i.

假定 y_i 为已知, 且当 $k\geqslant 0$ 时 $f^{(k)}(x_i)$ 存在. 考虑如下定义的级数 s_i:

$$s_i(h)=y_i+h\cdot f(x_i)+\frac{h^2}{2!}f'(x_i)+\frac{h^3}{3!}f''(x_i)+\cdots. \tag{3·17}$$

设 $r_i(h)=p_i(h)/q_i(h)$ 是 $s_i(h)$ 的 $[m/n]$ Padé 逼近. 于是

$$s_i(h)\cdot q_i(h)-p_i(h)=O(h^{m+n+k_i+1}), \tag{3·18}$$

其中 k_i 为某整数. 若 $q_i(x_{i+1})\neq 0$, 则 y_{i+1} 的值如下确定

$$y_{i+1}=r_i(x_{i+1}). \tag{3·19}$$

因为 y_0 是已知的, 并且对每个 i 来说, $r_i(h)$ 都是存在的, 所以采用上述步骤可以逐次求得 $y_1, y_2, \cdots, y_M$. 其中所求得的 y_M 值, 即可以作为 $y(b)$ 或 I 的近似值.

例 2 设 $m=n=1$, 则(3·17)的 $[1/1]$ 级 Padé 逼近 $r_i(h)=p(h)/q(h)$ 是不可约的:

$$p(h)=y_if(x_i)+h\left[f^2(x_i)-y_i\cdot\frac{f'(x_i)}{2}\right],$$

$$g(h)=f(x_i)-h\cdot\frac{f'(x_i)}{2}.$$

由公式(3·19)可知

$$y_{i+1}=y_i+h\frac{2f^2(x_i)}{2f(x_i)-hf'(x_i)},\quad i=0,\ 1,\ \cdots,\ M-1. \tag{3·20}$$

容易看出 y_M 是 $f(x)$ 及其一阶导数于 $x=x_i$ 处值的非线性组合.

作为公式(3·20)的推论,可得到一个近似积分公式

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)dx\approx h\cdot\frac{2f^2(x_i)}{2f(x_i)-h\cdot f'(x_i)}. \tag{3·21}$$

下面讨论所述积分方法的收敛性. 对于如下的单步方法

$$y_{i+1}=y_i+h\cdot g(x_i,\ h),\quad i=0,\ 1,\ \cdots,\ M-1, \tag{3·22}$$

按常微数值解法的收敛性定理,有

定理 9* 设 y_i 由(3·22)式所确定. 为使对每个 $x\in[a,b]$ 均有

$$\lim_{\substack{h\to0\\x=x_i}}y_i=y(x),$$

必须且只须 $\quad g(x,\ 0)=f(x).$

按照 $r_i(h)$ 的定义,(3·19)式可以写成(3·22)的形式

$$g(x,\ h)=[r_i(x)-y_i]/h$$

或 $$g(x,\ h)=f(x)+\frac{h}{2!}f'(x)+\frac{h^2}{3!}f''(x)+\cdots.$$

因而显然有 $\quad g(x,\ 0)=f(x).$

于是由定理9, 可知

$$\lim_{h\to0}y_M=y(b)=I. \tag{3·23}$$

上式说明数值积分方法(3·18)、(3·19)是收敛的. 当于(3·18)中 $k_i=0(i=0,\ 1,\ \cdots,\ M-1)$ 时,我们还有

* 可参见参考文献[44].

定理 10(Wuytack [20]) 设 $r_i(h)$ 是 $s_i(h)$ 的 $[m/n]$ 级 Padé 逼近，且 y_{i+1} 如(3·19)式所定义，则当 $h\to0$ 时我们有估计式

$$y(x_{i+1})-y_{i+1}=O(h^{m+n+1}),\quad i=0,1,\cdots,M-1.\qquad(3\cdot24)$$

在使用公式(3·20)进行计算时，每一步都要计算函数 $f(x)$ 在某点 $x=x_i$ 处的导数值. 因而给计算带来了相当的麻烦，限制了公式本身的应用. 为此用向前差商来替代(3·20)中的导数 $f'(x_i)$，从而便得到一个新的计算公式

$$y_{i+1}=y_i+h\cdot\frac{2f^2(x_i)}{3f(x_i)-f(x_{i+1})},\quad i=0,1,\cdots,M-1.\qquad(3\cdot25)$$

相应地，积分公式(3·21)则化为

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)dx\approx h\frac{2f^2(x_i)}{3f(x_i)-f(x_{i+1})}.\qquad(3\cdot26)$$

一般说来，当被积函数 $f(x)$ 比较光滑时，已知的一些古典方法比这里所介绍的非线性方法为好. 然而，当靠近积分区间有极点时，此处介绍的非线性方法则能给出较好的结果. 又因为(3·20)和(3·25)有可能出现奇异情况，在使用时我们须要十分小心.

第 4 章

有理样条函数逼近

样条函数是一种新的有效逼近工具. 它是 1946 年由 I. J. Schoenberg 首先引进的(参看[70]).

设$[a, b]$是一个闭区间,它也可以就是整个实数轴. 今对$[a, b]$作剖分 T:

$$T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_{j-1}<x_j<\cdots<x_{N-1}<x_N=b. \quad (0\cdot1)$$

称 $S(x)$为相对于剖分 T 的 n 次样条函数,如果:

(i) 在每个子区间$[x_{j-1}, x_j]$上, 函数 $S(x)$是一个 n 次多项式;

(ii) $S(x)$在整个$[a, b]$区间上,具有 $n-1$ 阶连续导数.

显然, n 次样条函数是 n 次多项式的推广. 因为 n 次多项式是 n 次样条的一种特殊形式. 但是一般 n 次样条函数却不同于多项式, 而是一种分段解析的函数. 样条函数的最大优点也渊源于这一点. 事实上, 因为多项式是一个解析的函数, 某一点附近的性质就足以决定它在整个实轴上的性质. 这点对于许多物理和力学问题的模写是不合适的. 可是样条函数由于它的分段解析性, 一点附近的性质只会局部地影响这个函数本身. 所以它理所当然地成为一种新的逼近工具. 何况它的计算量并不比通常多项式的计算量多很多.

关于样条函数的一般表达式,我们有

定理 1 在剖分(0·1)下, 任一 n 次样条函数 $S(x)$必可唯一地表示为

$$S(x)=p_n(x)+\sum_{j=1}^{N-1}C_j(x-x_j)_+^n, \quad (0\cdot2)$$

其中 $p_n(x)\in H_n$，且 $(x-x_j)_+^n(j=1, \cdots, N-1)$ 为截断多项式

$$(x-x_j)_+^n=[\max\{0, (x-x_j)\}]^n=\begin{cases}(x-x_j)^n, & \text{当 } x>x_j, \\ 0, & \text{当 } x\leqslant x_j.\end{cases} \tag{0·3}$$

证明 根据 n 次样条函数的定义，$S(x)$ 于起首第一个区间 $[x_0, x_1]$ 上应为一 n 次多项式. 设该多项式为 $p_n(x)\in H_n$，它应该就是(0·2)式中的 $p_n(x)$. 设 $S(x)$ 于区间 $[x_1, x_2]$ 中的表达式为 $q_n(x)$. 由于 $S(x)$ 于 $[a, b]$ 上具有 $n-1$ 阶连续导数，从而 $p_n(x)$ 与 $q_n(x)$ 于 $x=x_1$ 点处函数值，1 阶一直到 $n-1$ 阶导数值都应该相等. 即应有

$$\eta(x)\equiv q_n(x)-p_n(x)\equiv C_1(x-x_1)^n.$$

所以 $q_n(x)\equiv p_n(x)+C_1(x-x_1)^n$. 也即 $S(x)$ 于 $[x_0, x_2]$ 上可表示为

$$S(x)=p_n(x)+C_1(x-x_1)_+^n, \quad x_0\leqslant x\leqslant x_2.$$

采用完全类似的办法，可以顺次将 $S(x)$ 的表达式(0·2)证出来.

如果我们把 n 次样条函数定义中的条件 (ii) 改为（条件 (i)不变）

(ii)′ $S(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有 μ 阶连续导数($\mu\leqslant n-1$).

则由此而定义的函数 $S(x)$ 称为 n 次且具 μ 阶光滑度的样条函数. 记为 $S(x)\in\mathfrak{S}_n^\mu$(参看[7]、[8]).

采用定理 1 的类似证法，我们有

定理 2 在剖分(0·1)下，$S(x)\in\mathfrak{S}_n^\mu$ ($\mu\leqslant n-1$)，必须且只须 $S(x)$ 可表示为

$$S(x)=p_n(x)+\sum_{j=1}^{N-1}C_j(x)(x-x_j)_+^{\mu+1}, \tag{0·4}$$

其中 $p_n(x)\in H_n$，$C_j(x)\in H_{n-\mu-1}$ $(j=1, \cdots, N-1)$.

定理 2 的证明主要是按 $\mathfrak{S}_n^m$ 的定义和多项式的整除性理论来实现的. 此处不拟详述. 有兴趣的读者可参阅[7]或[8].

§1　有理样条函数的表现形式*

设以 $R_{r,l}$ 记下形有理函数

$$R(x)=P(x)/Q(x) \tag{1·1}$$

的全体所组成的集合，其中 $P(x)\in H_r$, $Q(x)\in H_l$. 只要一个有理分式函数经过约分后属于 $R_{r,l}$, 则认为该有理分式函数属于 $R_{r,l}$.

设 Δ 为 $[a, b]$ 区间的一个给定剖分

$$\Delta:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

其中我们并不排斥 $a=-\infty$, $b=\infty$ 的可能性.

如果 $R(x)$ 为区间 $[a, b]$ 上定义的实函数，满足条件:

(i) 于每个子区间 $[x_j, x_{j+1}]$ $(j=0, 1, \cdots, n-1)$ 上, $R(x)\in R_{r,l}$;

(ii) 于整个 $[a, b]$ 区间上, $R(x)\in C^k[a, b]$. 则称 $R(x)$ 为 $[a, b]$ 区间上、关于剖分 Δ 的 $(r, l)^k$ 阶有理样条函数. 所有 $(r, l)^k$ 阶有理样条函数的集合记为 $R_{r,l}^{(k)}(\Delta)$, 简记为 $R_{r,l}^{(k)}$.

引理　设 $x_0\in[a, b]$, 且 $Q(x_0)\neq 0$, 则 $R_{r,l}$ 中任一函数 $R(x)=P(x)/Q(x)$ 均可表示为 $(k\leqslant r-1)$

$$R(x)=\sum_{i=0}^{k}\frac{R^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i+(x-x_0)^{k+1}\frac{F(x)}{Q(x)}, \tag{1·2}$$

其中 $F(x)$ 为次数 $\leqslant\max(r, k+l)-(k+1)$ 的多项式.

证明　设 $G(x)=\sum_{i=0}^{k}\frac{R^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$.

---

* 可参见参考文献[6].

则 $R(x)-G(x)$ 的前 k 阶导数当 $x=x_0$ 时均等于0. 又因 $Q(x_0)\neq 0$, 所以 $x=x_0$ 必为

$$R(x)-G(x)=(P(x)-G(x)\cdot Q(x))/Q(x)$$

的分子 $P(x)-G(x)\cdot Q(x)$ 的 $k+1$ 重根. 从而有 $F(x)$, 使

$$P(x)-G(x)\cdot Q(x)=(x-x_0)^{k+1}\cdot F(x),$$

其中 $F(x)$ 的次数自然 $\leqslant \max(r,\ k+l)-(k+1)=\max(r-k-1,\ l-1)$.

定理 3 $R_{r,l}^{(k)}$ 中的任意有理样条函数均可表示为

$$R(x)=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{M_j(x)}{Q_j(x)\cdot Q_{j+1}(x)}(x-x_j)_+^{k+1}, \quad (1\cdot 3)$$

其中 $M_j(x)\in H_{r+l-k-1}$ 完全由 $P_1(x)$, $Q_j(x)$ 和 $R(x)$ 在 x_j 处的前 k 阶导数值所完全决定.

证明 设 $R(x)$ 在 $[x_{j-1},\ x_j]$, $[x_j,\ x_{j+1}]$ 上的表达式分别为 $P_j(x)/Q_j(x)$, $P_{j+1}(x)/Q_{j+1}(x)$. 不妨假定它们均已经过约分化简. 于是显然 $Q_j(x_j)\neq 0$, $Q_{j+1}(x_j)\neq 0$. 故由引理1, 它们分别可表示为

$$\frac{P_j(x)}{Q_j(x)}=\sum_{i=0}^{k}\frac{R^{(i)}(x_j)}{i!}(x-x_j)^i+(x-x_j)^{k+1}\frac{F_j(x)}{Q_j(x)},$$

$$\frac{P_{j+1}(x)}{Q_{j+1}(x)}=\sum_{i=0}^{k}\frac{R^{(i)}(x_j)}{i!}(x-x_j)^i+(x-x_j)^{k+1}\frac{H_j(x)}{Q_{j+1}(x)}. \quad (1\cdot 4)$$

因而

$$\begin{aligned}\frac{P_{j+1}(x)}{Q_{j+1}(x)}-\frac{P_j(x)}{Q_j(x)}&=\left[\frac{H_j(x)}{Q_{j+1}(x)}-\frac{F_j(x)}{Q_j(x)}\right](x-x_j)^{k+1}\\&=\frac{Q_j(x)H_j(x)-F_j(x)Q_{j+1}(x)}{Q_j(x)Q_{j+1}(x)}(x-x_j)^{k+1}\\&=\frac{M_j(x)}{Q_j(x)Q_{j+1}(x)}(x-x_j)^{k+1}.\end{aligned}$$

所以当 $x\in[x_l,\ x_{l+1}]$ 时, 有

$$\frac{P_{l+1}(x)}{Q_{l+1}(x)}-\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}=\sum_{j=1}^{l}\left(\frac{P_{j+1}(x)}{Q_{j+1}(x)}-\frac{P_j(x)}{Q_j(x)}\right)$$
$$=\sum_{j=1}^{l}\frac{M_j(x)}{Q_j(x)Q_{j+1}(x)}(x-x_j)_+^{k+1}.$$

于是定理 1 得证.

下面给出有理样条函数的另一种表示形式.

定理 4 $R_{r,l}^{(k)}$ 中的任意有理样条函数均可表示为

$$R(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\Delta T_k(x,\ x_i)G_i(x)$$
$$+\sum_{i=0}^{n-1}(x-x_i)^{k+1}\Delta T_k(x,\ x_i)\frac{H_{i-1}(x)}{Q_i(x)},\quad (1\cdot 5)$$

其中各 $H_{i-1}(x)$ 由 $Q_i(x)$ 所决定, 而

$$G_i(x)=\sum_{j=0}^{k}\frac{R^{(j)}(x_i)}{j\,!}(x-x_i)^j,$$
$$\Delta T_k(x,\ x_i)=\frac{(x-x_i)_+^{k+1}}{(x-x_i)^{k+1}}-\frac{(x-x_{i+1})_+^{k+1}}{(x-x_{i+1})^{k+1}}.\qquad (1\cdot 6)$$

证明 $R(x)\in R_{r,l}^{(k)}$ 于 $[x_{j-1},\ x_j]$ 中的有理分式 $P_j(x)/Q_j(x)$ 可以根据引理 1 而化为(1·4)式那样两种表现形式. 根据它们的同一性, 有等式

$$\sum_{i=0}^{k}\frac{R^{(i)}(x_j)}{i\,!}(x-x_j)^i+(x-x_j)^{k+1}\frac{F_j(x)}{Q_j(x)}$$
$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{R^{(i)}(x_{j-1})}{i\,!}(x-x_{j-1})^i+(x-x_{j-1})^{k+1}\frac{H_{j-1}(x)}{Q_j(x)}.$$

它又可改写为

$$\frac{F_j(x)}{Q_j(x)}=\frac{H_{j-1}(x)}{Q_j(x)}\cdot\frac{(x-x_{j-1})^{k+1}}{(x-x_j)^{k+1}}-\frac{G_j(x)-G_{j-1}(x)}{(x-x_j)^{k+1}}.\qquad (1\cdot 7)$$

由(1·4)式并注意截断多项式的定义, 显然有

$$R(x)=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\sum_{j=1}^{n-1}\left[\frac{H_j(x)}{Q_{j+1}(x)}-\frac{F_j(x)}{Q_j(x)}\right](x-x_j)_+^{k+1}.\qquad (1\cdot 8)$$

以(1·4)、(1·7)代入(1·8)，并经简单整理，得到

$$
\begin{aligned}
R(x)=&G_0(x)+\frac{H_0(x)}{Q_1(x)}(x-x_0)^{k+1}\\
&+\sum_{j=1}^{n-1}\left[\frac{H_j(x)}{Q_{j+1}(x)}-\frac{H_{j-1}(x)}{Q_j(x)}\cdot\frac{(x-x_{j-1})^{k+1}}{(x-x_j)^{k+1}}\right](x-x_j)_+^{k+1}\\
&+\sum_{j=1}^{n-1}[G_j(x)-G_{j-1}(x)]\frac{(x-x_j)_+^{k+1}}{(x-x_j)^{k+1}}\\
=&\left\{\sum_{j=1}^{n-1}\left[\frac{H_j(x)}{Q_{j+1}(x)}(x-x_j)^{k+1}-\frac{H_{j-1}(x)}{Q_j(x)}(x-x_{j-1})^{k+1}\right]\right.\\
&\left.\times\frac{(x-x_j)_+^{k+1}}{(x-x_j)^{k+1}}+\frac{H_0(x)}{Q_1(x)}(x-x_0)^{k+1}\right\}\\
&+\left\{G_0(x)+\sum_{j=1}^{n-1}[G_j(x)-G_{j-1}(x)]\frac{(x-x_j)_+^{k+1}}{(x-x_j)^{k+1}}\right\}.
\end{aligned}
\tag{1·9}
$$

今将(1·9)式右端两个花括号中的量分别记为σ_1和σ_2，并引入记号

$$
T_k(x,\ a)=\frac{(x-a)_+^{k+1}}{(x-a)^{k+1}}=\begin{cases}1, & 当\ x\geqslant a,\\ 0, & 当\ x<a,\end{cases}
$$

$$
\Delta T_k(x,\ x_j)=T_k(x,\ x_j)-T_k(x,\ x_{j+1}).
$$

显然

$$
\Delta T_k(x,\ x_j)=\begin{cases}1, & 当\ x_j\leqslant x\leqslant x_{j+1},\\ 0, & 当\ x\ 于其它处.\end{cases}
$$

先对σ_1作变换

$$
\begin{aligned}
\sigma_1=&\frac{H_0(x)}{Q_1(x)}(x-x_0)^{k+1}+\sum_{j=1}^{n-1}(x-x_j)^{k+1}\frac{H_j(x)}{Q_{j+1}(x)}T_k(x,\ x_j)\\
&-\sum_{j=0}^{n-2}(x-x_j)^{k+1}\frac{H_j(x)}{Q_j(x)}T_k(x,\ x_{j+1})\\
=&\frac{H_0(x)}{Q_1(x)}(x-x_0)^{k+1}+\sum_{j=1}^{n-2}(x-x_j)^{k+1}\frac{H_j(x)}{Q_{j+1}(x)}\Delta T_k(x,\ x_j)\\
&+(x-x_{n-1})^{k+1}\frac{H_{n-1}(x)}{Q_n(x)}T_k(x,\ x_{n-1})\\
&-(x-x_0)^{k+1}\frac{H_0(x)}{Q_1(x)}T_k(x,\ x_1).
\end{aligned}
$$

又因 $\qquad T_k(x, x_n)\equiv 0,\ T_k(x, x_0)\equiv 1.$

从而 $$\sigma_1=\sum_{j=0}^{n-1}(x-x_j)^{k+1}\frac{H_{j-1}(x)}{Q_j(x)}\Delta T_k(x, x_j). \qquad (1\cdot 10)$$

同法可证

$$\sigma_2=\sum_{j=0}^{n-1}G_j(x)\Delta T_k(x, x_j). \qquad (1\cdot 11)$$

由(1·9)、(1·10)和(1·11)即可知(1·5)式成立. 定理4得证.

在[8]中,作者基于代数几何中的Bezout定理,给出了多元有理样条的表达形式.

§2 有理样条插值方法*

特殊形式的有理样条插值问题的研究工作,是从1973年R. Schaback的工作[68]开始的. 他考虑了在剖分

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n<x_{n+1}=b \qquad (2\cdot 1)$$

下,分段表达式为

$$f_j(x)=\frac{a_j+b_jx+c_jx^2}{d_j+e_jx},\quad x_j\leqslant x\leqslant x_{j+1}$$

的有理样条函数 $f(x)\in C^2[a, b]$ 的插值问题

$$f(x_j)=y_j,\quad 0\leqslant j\leqslant n+1, \qquad (2\cdot 2)$$

其中 $y_0, \cdots, y_{n+1}$ 是事先指定的常数, $f(x)$ 满足边界条件

$$f'(a)=u \quad 或 \quad f''(a)=u, \qquad (2\cdot 3)$$

$$f'(b)=v \quad 或 \quad f''(b)=v. \qquad (2\cdot 4)$$

在[68]中, R. Schaback 指出了: 若记

---

* 可参见参考文献[68]、[6].

$$
\left.\begin{aligned}
&D^1(y_j, y_{j+1})=\frac{y_{j+1}-y_j}{x_{j+1}-x_j},\ j=0,1,\cdots,n,\\
&D_j=D^1(y_j, y_{j+1})-D^1(y_{j-1}, y_j),\quad j=1,\cdots,n,\\
&D_0=\begin{cases}D^1(y_0, y_1)-u, & \text{当}(2\cdot3)\text{中取 } f'(a)=u\text{ 时},\\ u, & \text{当}(2\cdot3)\text{中取 } f''(a)=u\text{ 时},\end{cases}\\
&D_{n+1}=\begin{cases}v-D^1(y_n, y_{n+1}), & \text{当}(2\cdot4)\text{中取 } f'(b)=v\text{ 时},\\ v, & \text{当}(2\cdot4)\text{中取 } f''(b)=v\text{ 时},\end{cases}
\end{aligned}\right\}\qquad(2\cdot5)
$$

则有

定理 5([68]) 设 $s=0, 1$ 或 -1, 且

$$
\operatorname{sign} D_j=s,\ j=0, 1, \cdots, n+1. \qquad (2\cdot6)
$$

则插值问题(2·1)～(2·2)唯一可解.

当实际求解有理样条插值(2·1)～(2·2)时，则需要求解一个非线性方程组. 因而真正实现起来是麻烦的.

在文章[6]中，作者与吴顺唐曾从某些实际课题出发，具体研究了若干特定形式有理样条函数的插值问题.

这些有理样条函数，乃是在多项式后面添上一个非线性修正项，使之既具有有理样条函数的特征、又可以回避求解非线性方程组的困难.

设

$$
\begin{aligned}
p_i(k, t)&=\frac{1}{i!}\sum_{j=0}^{k-i}(-1)^{i+j-1}\binom{2k+1-i}{j}\\
&\quad\times t^{i+j}(t-1)^{2k+1-i-j},\\
q_i(k, t)&=\frac{1}{i!}\sum_{j=0}^{k-i}(-1)^{j}\binom{2k+1-i}{j}\\
&\quad\times t^{2k+1-i-j}(t-1)^{i+j}.
\end{aligned}\qquad(2\cdot7)
$$

则不难验证下列各式成立($0\leqslant j\leqslant k$):

$$
\begin{aligned}
&p_i^{(j)}(k, 0)=\delta_{ij},\\
&q_i^{(j)}(k, 1)=\delta_{ij},\\
&p_i^{(j)}(k, 1)=q_i^{(j)}(k, 0)=0.
\end{aligned}\qquad(2\cdot8)
$$

且

$$
\begin{aligned}
p_i^{(k+1)}(k,\ 0) &= \frac{(-1)^{k+1}(2k+1+i)!}{i!(k+1-i)!}, \\
p_i^{(k+1)}(k,\ 1) &= \frac{(-1)^{k-1}(2k+1-i)!}{i!(k-i)!}, \\
q_i^{(k+1)}(k,\ 0) &= (-1)^{k+i-1}p_i^{(k+1)}(k,\ 1), \\
q_i^{(k+1)}(k,\ 1) &= (-1)^{k+i-1}p_i^{(k+1)}(k,\ 0).
\end{aligned}
\tag{2·9}
$$

下面我们来分别讨论三类有理样条插值问题.

2-1 (I)型有理样条插值

考虑下列形式的有理样条函数 $R(x)$，其在 $[x_j,\ x_{j+1}]$ $(j=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ 上的表达式为

$$
\begin{aligned}
R(x) = R_j(x) = \sum_{i=0}^{k}\Big[& m_j^{(i)} p_i\left(k, \frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j}\right) \\
& + m_{j+1}^{(i)} q_i\left(k, \frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j}\right)\Big] \\
& + \frac{d_j}{x-c_j}(x-x_j)^{k+1}(x-x_{j+1})^{k+1}.
\end{aligned}
\tag{2·10}
$$

插值条件为

$$
R^{(i)}(x_j) = y_j^{(i)},\quad R^{(i)}(x_{j+1}) = y_{j+1}^{(i)},\quad i=0,\ 1,\ \cdots,\ k+1, \tag{2·11}
$$

此处 $y_j^{(i)}$ 与 $y_{j+1}^{(i)}$ $(i=0,\ 1,\ \cdots,\ k+1)$ 是预先给定的实数.

定理 6([6]) 有理样条插值问题(2·10)、(2·11)是唯一可解的.

证明 由(2·8)和(2·11)可知

$$
m_j^{(i)} = y_j^{(i)},\quad i=0,\ 1,\ \cdots,\ k. \tag{2·12}
$$

若将(2·10)右端多项式部分与有理分式部分分别记为 $N_j(x)$ 与 $M_j(x)$，则由(2·9)式可得

$$
\begin{aligned}
N_j^{(k+1)}(x_j) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{(x_{j+1}-x_j)^{k+1}}\Big[& (-1)^{k+1} y_j^{(i)} \frac{(2k+1-i)!}{i!(k+1-i)!} \\
& + (-1)^i y_{j+1}^{(i)} \frac{(2k+1-i)!}{i!(k-i)!}\Big],
\end{aligned}
\tag{2·13a}
$$

$$N_j^{(k+1)}(x_{j+1})=\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{(x_{j+1}-x_j)^{k+1}}\Big[(-1)^{k+1}y_j^{(i)}\frac{(2k+1-i)!}{i!\,(k-i)!}$$

$$+(-1)^i y_{j+1}^{(i)}\frac{(2k+1+i)!}{i!\,(k+1-i)!}\Big]. \qquad (2\cdot 13b)$$

又因为

$$M_j^{(k+1)}(x_j)=\frac{(k+1)!\,(x_j-x_{j+1})^{k+1}\cdot d_j}{x_j-c_j}$$

$$M_j^{(k+1)}(x_{j+1})=\frac{(k+1)!\,(x_{j+1}-x_j)^{k+1}\cdot d_j}{x_{j+1}-c_j}. \qquad (2\cdot 14)$$

今将上两式相除，并利用 $i=k+1$ 时的插值条件(2·11)，可得

$$\frac{x_{j+1}-c_j}{x_j-c_j}=\frac{(-1)^{k+1}M_j^{(k+1)}(x_j)}{M_j^{(k+1)}(x_{j+1})}$$

$$=\frac{(-1)^{k+1}[y_j^{(k+1)}-N_j^{(k+1)}(x_j)]}{y_{j+1}^{(k+1)}-N_j^{(k+1)}(x_{j+1})}.$$

所以

$$c_j=x_{j+1}-\frac{(-1)^{k+1}(x_{j+1}-x_j)\,[y_j^{(k+1)}-N_j^{(k+1)}(x_j)]}{\left\{\begin{array}{l}[(-1)^{k+1}y_j^{(k+1)}-y_{j+1}^{(k+1)}]\\+[(-1)^{k+1}N_j^{(k+1)}(x_j)-N_j^{(k+1)}(x_{j+1})]\end{array}\right\}}. \qquad (2\cdot 15)$$

再由(2·12)式便得

$$d_j=\frac{M_j^{(k+1)}(x_{j+1})\,(x_{j+1}-c_j)}{(k+1)!\,(x_{j+1}-x_j)^{k+1}}$$

$$=\frac{(-1)^{k+1}[y_{j+1}^{(k+1)}-N_j^{(k+1)}(x_{j+1})]\cdot[y_j^{(k+1)}-N_j^{(k+1)}(x_j)]}{\left\{\begin{array}{l}(k+1)!\,(x_{j+1}-x_j)^k[((-1)^{k+1}y_j^{(k+1)}-y_{j+1}^{(k+1)})\\+((-1)^{k+1}N_j^{(k+1)}(x_j)-N_j^{(k+1)}(x_{j+1}))]\end{array}\right\}}.$$

$$(2\cdot 16)$$

由(2·12)、(2·15)和(2·16)即能完全确定(2·10)．这说明插值问题(2·10)、(2·11)是唯一可解的．

由(2·16)可知，如果

$$y_{j+1}^{(k+1)}-N_j^{(k+1)}(x_{j+1})=0 \qquad (2\cdot 17)$$

或

$$y_j^{(k)}-N_j^{(k+1)}(x_j)=0$$

中有一个成立，则 $d_j=0$. 此时 $R_j(x)$ 成为一个 $2k+1$ 次多项式.

在通常有理样条插值问题中，于点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 处只给出 $y_j^{(0)}(j=1, 2, \cdots, n)$，而 $y_j^{(i)}(i\geqslant 1)$ 却常常是不知道的，这时可用数值微分法求出诸 $y_j^{(i)}$ 来. 例如 y_i' 就可以近似地由下式计算:

$$y_i' \approx [f(x_{i-1}, x_i)+f(x_i, x_{i+1})]/2, \tag{2·18}$$

其中 $f(x_j, x_{j+1})$ 表示一阶差商 $(y_{j+1}-y_j)/(x_{j+1}-x_j)$.

在实际应用上，k 通常取作 0, 1 或 2 时已经够用了. 例如，当 $k=0$时,

$$p_0(t)=1-t, \quad q_0(0, t)=t.$$

此时显然有

$$N_j'(x_j)=N_j'(x_{j+1})=\frac{y_{j+1}-y_j}{x_{j+1}-x_j}=f(x_j, x_{j+1}),$$

从而推出

$$\begin{aligned} c_j&=x_{j+1}-\frac{(x_{j+1}-x_j)(y_j'-f(x_j, x_{j+1}))}{y_{j+1}'-y_j'-2f(x_j, x_{j+1})}, \\ d_j&=\frac{[y_j'-f(x_j, x_{j+1})][y_{j+1}'-f(x_j, x_{j+1})]}{y_{j+1}'-y_j'-2f(x_j, x_{j+1})}. \end{aligned} \tag{2·19}$$

若将之代入(2·10)，即得

$$R_j(x)=y_j+f(x_j, x_{j+1})(x-x_j) + \frac{(x-x_j)(x-x_{j+1})[y_j'-f(x_j, x_{j+1})][y_{j+1}'-f(x_j, x_{j+1})]}{\left\{\begin{array}{l}[y_j'+y_{j+1}'-2f(x_j, x_{j+1})x] \\ -[x_jy_j'+x_{j+1}y_{j+1}'-(x_j+x_{j+1})f(x_j, x_{j+1})]\end{array}\right\}}. \tag{2·20}$$

如果 y_j', y_{j+1}' 没有事先给出，则可按[11]中给出的一种光滑插值方法算出各个 $y_j'(j=0, 1, \cdots, n+1)$，然后代入(2·20)式. 也可以干脆将(2·18)式代入(2·20)，而得到

$$R_j(x)=y_j+f(x_j,\ x_{j+1})(x-x_j)$$

$$+\frac{\left\{\begin{array}{l}(x-x_j)(x-x_{j+1})[f(x_{j-1},\ x_j)-f(x_j,\ x_{j+1})]\\ \times[f(x_{j+1},\ x_{j+2})-f(x_j,\ x_{j+1})]\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l}2[f(x_{j-1},\ x_j)+f(x_{j+1},\ x_{j+2})-2f(x_j,\ x_{j+1})]x\\ +2[x_jf(x_{j-1},x_j)+x_{j+1}f(x_{j+1},x_{j+2})\\ -(x_j+x_{j+1})f(x_j,\ x_{j+1})]\end{array}\right\}}. \quad (2\cdot21)$$

不难直接验证插值型有理样条函数(2·20)对于1, x, x^2和$1/x$是精确成立的. 即这种有理样条插值算法不仅具有2次代数精确度，而且还具有某种“有理”精确度. 这当然是一般多项式样条函数所不及的.

2-2 (II)型有理样条插值

考虑下形有理样条函数

$$R(x)=R_j(x)=\sum_{i=0}^{2k-1}a_{ij}(x-x_j)^i$$

$$+\frac{(x-x_j)^k(x-x_{j+1})^k}{(c_jx+d_j)^{2k-1}},\quad x_j\leqslant x\leqslant x_{j+1}. \quad (2\cdot22)$$

插值条件为

$$R^{(i)}(x_j)=y_j^{(i)},\ R^{(i)}(x_{j+1})=y_{j+1}^{(i)},\ i=0,\ 1,\ \cdots,\ k. \quad (2\cdot23)$$

定理7([6]) 有理样条插值问题(2·22)、(2·23)是可解的.

事实上，由插值条件

$$R^{(i)}(x_j)=y_j^{(i)},\quad i=0,\ 1,\ \cdots,\ k-1,$$

可知

$$a_{ij}=y_j^{(i)}/i!,\quad i=0,\ 1,\ \cdots,\ k-1.$$

又由插值条件

$$R^{(i)}(x_{j+1})=y_{j+1}^{(i)},\quad i=0,\ 1,\ \cdots,\ k-1,$$

可知

$$y_{j+1}^{(i)}=\sum_{p=i}^{k-1}p(p-1)\cdots(p-i+1)(x_{j+1}-x_j)^{p-i}a_{pj}$$

$$+\sum_{p=k}^{2k-1}p(p-1)\cdots(p-i+1)(x_{i+1}-x_i)^{p-i}a_{pj}.$$

即

$$\sum_{p=0}^{k-1} A_{p+k}^{i}(x_{j+1}-x_j)^p a_{p+k,j}$$

$$=y_{j+1}^{(i)}(x_{j+1}-x_j)^i-\sum_{p=i}^{k-1} A_p^i(x_{j+1}-x_j)^p a_{pj}, \qquad (2\cdot24)$$

其中 $A_p^i=p(p-1)\cdots(p-i+1)$, $i=0, 1, \cdots, k-1$. 容易算出(2·24)的系数行列式

$$\det(A_{p+k}^i(x_{j+1}-x_j)^p)=(k-1)!(k-2)!$$
$$\times\cdots2!1!(x_{j+1}-x_j)^{k(k-1)/2}\neq0.$$

从而(2·24)方程组有唯一解 a_{kj}, $a_{k+1,j}$, $\cdots$, $a_{2k-1,j}$. 最后由插值条件

$$R^{(k)}(x_j)=y_j^{(k)},\quad R^{(k)}(x_{j+1})=y_{j+1}^{(k)}$$

可得关于 c_j 和 d_j 的方程组:

$$c_jx_j+d_j=\left[\frac{k!(x_{j+1}-x_j)^k}{y_j^{(k)}-k!a_{kj}}\right]^{\frac{1}{2k-1}},$$

$$c_jx_{j+1}+d_j=\left[\frac{k!(x_{j+1}-x_j)^k}{y_{j+1}^{(k)}-\sum\limits_{p=k}^{2k-1}A_p^k(x_{j+1}-x_j)^{p-k}a_{pj}}\right]^{\frac{1}{2k-1}}. \qquad (2\cdot25)$$

由此即可得出 c_j 和 d_j 来.

当在 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 上只给出 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 时,仍可用数值微分法加以解决.

如果在两端 x_0 和 x_n 处的边界条件不对称时,我们仍然可以避免求解非线性方程组.试以 $k=1$ 为例,此时

$$R_j(x)=a_j^{(0)}+a_j^{(1)}(x-x_j)+\frac{(x-x_j)(x-x_{j+1})}{a_j^{(2)}x+a_j^{(3)}}, \qquad (2\cdot26)$$

而插值条件为

$$R(x_j)=y_j,\ R'(x_j)=y'_j,\ R''(x_j)=y''_j,\ R(x_{j+1})=y_{j+1}. \qquad (2\cdot27)$$

则不难算出:

$$
\begin{aligned}
&a_j^{(0)}=y_j,\\
&a_j^{(1)}=f(x_j,\ x_{j+1}),\\
&a_j^{(2)}=\frac{y_j''[y_j'-f(x_j,\ x_{j+1})]}{2(x_{j+1}-x_j)^3}+\frac{1}{y_j'-f(x_j,\ x_{j+1})},\\
&a_j^{(3)}=\frac{-x_jy_j''[y_j'-f(x_j,\ x_{j+1})]}{2(x_{j+1}-x_j)^3}-\frac{x_{j+1}}{y_j'-f(x_j,\ x_{j+1})}.
\end{aligned}
\tag{2·28}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
R_j(x)=&f(x_j)+f(x_j,\ x_{j+1})(x-x_j)\\
&+\frac{2(x_{j+1}-x_j)^3[y_j'-f(x_j,\ x_{j+1})]}{2(x_{j+1}-x_j)^3(x-x_{j+1})+y_j''(x-x_j)[y_j'-f(x_j,\ x_{j+1})]^2},\\
&x_j\leqslant x\leqslant x_{j+1}.
\end{aligned}
\tag{2·29}
$$

总之，对于区间$[a,\ b]$的剖分(2·1)，除了各网点$x_j(j=0,\ 1,\ \cdots,\ n+1)$处的函数值之外，只须再知道一端($a$ 或 b)处的端点条件 $f'(a)$, $f''(a)$或$f'(b)$, $f''(b)$，则整条有理样条曲线 $R(x)\in R_{2,1}^{(2)}$ 即可完全确定. 由(2·29)给出的有理样条函数具有保凸的特点.

2-3 (III)型有理样条插值

我们知道人造地球卫星的轨道计算中常要用到下面的一种高空大气模型:

$$
R_j(x)=a_j+\frac{b_j}{x-c_j},\quad x_j\leqslant x\leqslant x_{j+1}.
$$

这启发我们考虑如下形式的有理样条函数

$$
R_j(x)=\sum_{l=0}^{k}a_{jl}'(x-x_j)^l+\frac{b_j'}{x-c_j'}.
\tag{2·30}
$$

然而由于这种形式的有理样条函数的系数不便于求出，所以常将之变形为

$$
R_j(x)=\sum_{l=0}^{k}a_{jl}(x-x_j)^l+\frac{b_j(x-x_j)^{k+1}}{x-c_j}.
\tag{2·31}
$$

显然，只须将(2·31)中的 $(x-x_j)^{k+1}$ 改写为

$$[(x-c_j)-(x_j-c_j)]^{k+1},$$

并展开之，即可化为(2·30)的形式.

如果插值条件为

$$\begin{aligned} &R^{(i)}(x_j)=y_j^{(i)}, \quad i=0,\ 1,\ \cdots,\ k, \\ &R(x_{j+1})=y_{j+1}, \quad R'(x_{j+1})=y'_{j+1}. \end{aligned} \tag{2·32}$$

则我们有

定理8([6]) 有理样条插值问题(2·31)、(2·32)是可解的.

事实上，由(2·32)可得

$$a_{ji}=\frac{y_j^{(i)}}{i!}, \quad i=0,\ 1,\ \cdots,\ k.$$

且 $$y_{j+1}-\sum_{j=0}^{k}a_{ji}(x_{j+1}-x_j)^i=\frac{b_j}{x_j-c_j}(x_{j+1}-x_j)^{k+1},$$

$$y'_{j+1}-\sum_{i=1}^{k}ia_{ji}(x_{j+1}-x_j)^{j-1}$$

$$=b_j(x_{j+1}-x_j)^k\left[\frac{k+1}{x_{j+1}-c_j}-\frac{x_{j+1}-x_j}{(x_{j+1}-c_j)^2}\right].$$

求解之，可得到

$$\begin{aligned} b_j&=\frac{\sum_{j=0}^{k}a_{ji}(x_{j+1}-x_j)^i-y_{j+1}}{(x_{j+1}-x_j)^k}(c_j^*+1), \\ c_j&=x_{j+1}-(x_{j+1}-x_j)c_j^*, \end{aligned} \tag{2·33}$$

其中 $$c_j^*=\frac{y_{j+1}-\sum_{i=0}^{k}a_{ji}(x_{j+1}-x_j)^i}{\left\{\begin{aligned}&(k+1)\left[y_{j+1}-\sum_{i=0}^{k}a_{ji}(x_{j+1}-x_j)^i\right]\\ &-(x_{j+1}-x_j)\left[y'_{j+1}-\sum_{i=1}^{k}ia_{ji}(x_{j+1}-x_j)^{i-1}\right]\end{aligned}\right\}}.$$

对于有理样条函数(2·31)，还可以考虑如下的插值条件

$$R^{(i)}(x_j)=y_j^{(i)},\quad i=0,\ 1,\ \cdots,\ k+1,$$
$$R(x_{j+1})=y_{j+1}. \tag{2·34}$$

此时插值问题(2·31)、(2·34)仍然是可解的. 今仅以 $k=0$ 为例来简要地加以说明. 容易求出

$$a_j=y_j^{(0)}=y_j,$$
$$b_j=f(x_j,\ x_{j+1})\left[x_{j+1}-\frac{x_jy'_j-x_{j+1}f(x_j,\ x_{j+1})}{y'_j-f(x_j,\ x_{j+1})}\right],$$
$$c_j=\frac{x_jy'_j-x_{j+1}f(x_j,\ x_{j+1})}{y'_j-f(x_j,\ x_{j+1})}.$$

因为

$$R'_j(x_{j+1})=b_j(x_j-c_j)/(x_{j+1}-c_j)^2$$
$$=[f(x_j,\ x_{j+1})]^2/y'_j,$$

所以可把它作为 y'_{j+1}, 则它们同型值 $(x_{j+1},\ y_{j+1})$, $(x_{j+2},\ y_{j+2})$ 一起, 又可仿上定出下一区间 $[x_{j+1},\ x_{j+2}]$ 上的表达式 $R_{j+1}(x)$ 等等. 从而插值问题(2·31)、(2·34)可解.

例 汽车制造厂生产的某种轿车的外形数据如表 2·1 所示:

表 **2·1**

x_i	1.162	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4
y_i	0.905	0.9475	1.09	1.155	1.19	1.20	1.19	1.1675

x_i	2.6	2.8	3.0	3.1	3.2
y_i	1.135	1.0775	0.99	0.9275	0.835

采用文[11]中提出的一种光滑插值算法, 可求得各网点上的导数值如表 2·2 所示.

如果以各相应数值, 包括相应一阶差商值代入公式(2·20), 即可得到各段上有理样条函数的表达式.

此处不拟列出这些表达式, 而只有兴趣来具体考察它们

表 2.2

x_i	1.162	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
y_i'	1.20574	1.02549	0.45604[illegible]	0.235314	0.113484	−0.0065263	−0.089356

x_i	2.4	2.6	2.8	3.0	3.1	3.2
y_i'	−0.1294[illegible]	−0.21356	−0.36165	−0.52919	−0.75599	−1.09021

的精确度. 为此，我们甚至可以把区间放大一倍（误差自然是增大了），而来考察区间[1.4, 1.8]上的有理样条插值公式

$$R(x)=1.09+0.25(x-1.4)-\frac{0.028128(x-1.4)(x-1.8)}{0.069528x-0.042724},$$

其在 $x=1.6$ 处的值为 $R(1.6)=1.1564$，与给定值 1.155 的误差 ≈ 0.001.

此例说明，即使形式不复杂的有理样条插值公式(2·20)，其精确度也是很不错的.

第 5 章

某些数值有理逼近方法

在前四章里，我们介绍了有理函数插值，有理 Чебышев 逼近，Padé 逼近和有理样条函数的理论以及有关的数值计算方法. 然而还有相当多的数值有理逼近方法是前四章所不能完全概括的. 因此在本书的最后一章里，我们特别地把一些比较常用的算法作一番介绍. 这对于从事有理逼近数值方法研究和应用的科技工作者将是有意义的.

由于篇幅所限，对所述各方法，我们只能作简单扼要的介绍. 为便于有兴趣的读者查阅，在有关部分都给出了相应的参考文献.

§1 Darboux 公式与 Hummel-Seebeck-Obrechkoff 方法

为了叙述 Hummel-Seebeck-Obrechkoff 方法，我们先来介绍 Darboux 公式.

考察积分式

$$R_n=(-1)^n(z-a)^{n+1}\int_0^1\varphi(t)f^{(n+1)}(a+t(z-a))dt.$$

对于上式右端的积分，反复作分部积分，于是可得

$$R_n=\sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r}(z-a)^{n-r}[\varphi^{(r)}(1)f^{(n-r)}(z)-\varphi^{(r)}(0)f^{(n-r)}(a)]$$
$$-\int_0^1\varphi^{(n+1)}(t)f(a+t(z-a))dt. \tag{1.1}$$

如果于上式中取 $\varphi(z)$ 为一个次数不超过 n 的多项式，则上式(1·1)中的积分为零．于是有如下的 Darboux 公式(参阅[76])

$$\varphi^{(n)}(0)[f(z)-f(a)]=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}(z-a)^{r}$$
$$\times[\varphi^{(n-r)}(1)f^{(r)}(z)-\varphi^{(n-r)}(0)f^{(r)}(a)]+R_n. \qquad (1\cdot 2)$$

有趣的是 Darboux 公式的几种特殊的应用．

设 $\varphi(t)=(t-1)^n$．则显然有

$$\varphi^{(r)}(1)=0,\quad r=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1;$$

$$\varphi^{(n-r)}(0)=\frac{n!}{r!}(-1)^r,\quad r=1,\ \cdots,\ n.$$

从而上述 Darboux 公式可化为

$$n![f(z)-f(a)]=\sum_{r=1}^{n}\frac{n!}{r!}f^{(r)}(a)(z-a)^r+R_n,$$

亦即
$$f(z)=\sum_{r=0}^{n}\frac{f^{(r)}(a)}{r!}(z-a)^r+\frac{1}{n!}R_n.$$

它恰好是带积分余项的 Taylor 公式．因此，实际上 Darboux 公式乃是 Taylor 公式的一种推广．

设 $\varphi(t)=t^n(t-1)^n$，并在 Darboux 公式(1·2)中用 $2n$ 替换 n，则得简化公式

$$f(z)=f(a)+\sum_{r=1}^{n}\frac{(2n-r)!}{(2n)!}\binom{n}{r}[f^{(r)}(a)-(-1)^r f^{(r)}(z)]$$
$$\times(z-a)^r+R_{2n}, \qquad (1\cdot 3)$$

其中

$$R_{2n}=(z-a)^{2n+1}\int_0^1 t^n(t-1)^n f^{(2n+1)}(a+t(z-a))dt.$$

公式(1·3)可称为 Hummel-Seebeck-Obrechkoff 公式，简称 HSO 公式(参阅[46]、[54])．

利用 HSO 公式可以获得一大批函数的有理逼近式．下

面用例子说明，应如何利用 HSO 公式来求得某些函数的有理逼近式. 取

$$f(z)=e^z,\ \ a=0.$$

以之代入 HSO 公式(1·3)，则 e^z 将同时出现在(1·3)式的两边. 以 e^z 作为未知量解出即得

$$e^z=\frac{\sum\limits_{r=0}^{n}(2n-r)!\binom{n}{r}z^r+R_{2n}}{\sum\limits_{r=0}^{n}(-1)^r(2n-r)!\binom{n}{r}z^r},\tag{1·4}$$

$$R_{2n}=z^{2n+1}\int_0^1 t^n(t-1)^n e^{tz}dt.$$

舍弃(1·4)式中的 R_{2n} 项，则获得 e^z 的近似有理分式. 有趣的是，这个 e^z 的有理逼近式恰好为 e^z 的$[n/n]$级 Padé 逼近式:

$$[n/n]=\frac{\sum\limits_{r=0}^{n}(2n-r)!\binom{n}{r}z^r}{\sum\limits_{r=0}^{n}(-1)^r(2n-r)!\binom{n}{r}z^r}.\tag{1·5}$$

当然，人们不要因此而认为用 HSO 方法对任意给定函数所求得的有理逼近式就一定是该函数的 Padé 逼近. 事实上，若取 $f(z)=\exp(\mathrm{arc\,tg}\,z)$，则按 HSO 公式($a=0$, $n=1$)得到

$$f(z)\approx\frac{1+\frac{1}{2}z+z^2+\frac{1}{2}z^3}{1-\frac{1}{2}z+z^2}.$$

但相应[3/2]阶 Padé 逼近却为

$$f(z)\approx\frac{1+0.84z+0.87z^2+\frac{17}{60}z^3}{1-0.16z+0.53z^2}.$$

设 $f(x)=c\exp\frac{-x^2}{2}$. 取 $a=0$, $n=2$ 时，按 HSO 方法算出的有理逼近式为

$$f(x) \approx \frac{c(12-x^2)}{12+5x^2+x^4}. \tag{1·6}$$

如果对这同一个函数，直接采用 Darboux 公式，其中把 $\varphi(t)$ 取为[0, 1]区间上的 Чебышев 多项式 $T_n^*(x)$，则可求得

$$f(x) \approx \frac{c(16-x^2)}{16+7x^2+x^4}. \tag{1·7}$$

当取 $c=1/\sqrt{2\pi}$ 时，由(1·6)和(1·7)式给出的有理逼近式的最大误差分别为($-\infty<x<\infty$)

0.0125　和　0.026.

关于 HSO 方法的适用范围问题，E. W. Cheney 与 T. H. Southard 在总结性文章[27]中已有讨论. 他们指出，只要函数 $f(z)$满足关系式

$$f'(z)=R_1(z)f(z)+R_2(z), \tag{1·8}$$

其中 $R_1(z)$和 $R_2(z)$为 z 的任意给定的有理函数，则 $f(z)$就可以用 HSO 方法来获得它的有理逼近式.

满足关系式(1·8)的函数 $f(z)$还是不少的，例如比较常见的有

$$e^z,\ e^{-z^2/2},\ 10^z,\ \log_b z,\ \operatorname{arc\,tg} z,$$

$$(z^2+1)^{-1/2}(c+\operatorname{sh}^{-1}z),\quad z^{-n}(a+b\log z),$$

$$(1-z^2)^{-1/2},\quad [R(z)]^a,$$

其中 $R(z)$为任意有理函数，a 为任意数.

徐利治、周蕴时与作者在文[4]的 § 6 中，作为边界型降维展开的应用，讨论了多元函数的有理逼近问题.

设 D 是含于方域 $S(0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1)$ 内的闭区域，它的边界 c 是一条按段光滑的简单封闭曲线. 假设 $F(x, y)$于 S 上对 x 具有 m 阶连续偏导数 $F_x^{(m)}$；又设

$$P(x, y)=x^m+Q(x, y)$$

是一个二元多项式，其中 $Q(x, y)$ 所含 x 的最高次幂不超过 $m-1$，则有([3])

$$\iint\limits_D F dx dy = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k}{m!} \int_{\partial} P_x^{(m-k-1)} \cdot F_x^{(k)} dy + \rho_m, \\ \rho_m = \frac{(-1)^m}{m!} \iint\limits_D P \cdot F_x^{(m)} dx dy. \tag{1·9}$$

设 $0 \leqslant x_0 < x \leqslant 1$, $0 \leqslant y_0 < y \leqslant 1$. 令 $D \equiv [x_0, x; y_0, y]$ 表示矩形区域，它由两对平行于坐标轴的直线所围成，而直线与纵横坐标轴的距离分别为 $x_0, x; y_0, y$. 又假定 $P(x) \in H_n$(x 的 n 次多项式类). 今取

$$F(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$

代入展开公式(1·9)，则可得

$$f(x, y) = f(x_0, y) + f(x, y_0) - f(x_0, y_0) \\ + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k}{m!} \left[\left(\frac{d^{m-k-1} P}{dx^{m-k-1}} \right) \left[\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}} \right]_{y_0}^{y} \right]_{x_0}^{x} + \rho_m, \tag{1·10}$$

这里我们采用了记法

$$[f(x, y)]_{x_0}^{x} = f(x, y) - f(x_0, y),$$
$$[f(x, y)]_{y_0}^{y} = f(x, y) - f(x, y_0),$$

而 ρ_m 可表为

$$\rho_m = \frac{(-1)^m}{m!} \int_{x_0}^{x} P(x) \left[\frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1}} \right]_{y_0}^{y} dx. \tag{1·11}$$

为了使余项(1·11)有较小的估值，我们选择 Legendre 多项式作为 $P(x)$：

$$P(x) = \frac{m!}{(2m)!} \left(\frac{d}{dx} \right)^m [x^m (x-1)^m], \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

于是由(1·10)可得(其中 $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$)

$$f(x, y)=f(0, y)+f(x, 0)-f(0, 0)$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}}{(2m)!}\left[\left[\frac{\partial^k f}{\partial x^k}\right]_0^y\left(\frac{d}{dx}\right)^{2m-k}(x^2-x)^m\right]_0^x+\delta_m. \tag{1·12}$$

文[4]分别在 $\frac{\partial^{m+1}f}{\partial x^{m+1}}$, $\frac{\partial^{m+2}f}{\partial x^{m+1}\partial y}$ 连续的假定下得到(1·12)中余项 δ_m 的估计式

$$\begin{aligned}|\delta_m|&\leqslant\frac{m!}{(2m)!}\left(\frac{2x}{m+0.5}\right)^{1/2}\left\|\frac{\partial^{m+1}f}{\partial x^{m+1}}\right\|,\\|\delta_m|&\leqslant\frac{m!}{(2m)!}\left(\frac{|xy|}{2m+1}\right)^{1/2}\left\|\frac{\partial^{m+2}f}{\partial x^{m+1}\partial y}\right\|,\end{aligned} \tag{1·13}$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示 S 上的 C 模.

作为例子,求 $\ln(1+x+y)$ 的近似有理分式,其中 $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$.

按(1·12)直接可得下述有理逼近式

$$\ln(1+x+y)\approx\ln(1+x)+\ln(1+y)+\sum_{k=1}^{m}\frac{(k-1)!}{(2m)!}$$
$$\cdot\left[\left(\frac{1}{(1+x+y)^k}-\frac{1}{(1+x)^k}\right)p_k(x)\right]_0^x, \tag{1·14}$$

其中

$$p_k(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^{2m-k}(x^2-x)^m,$$

而 $\ln(1+x)$ 与 $\ln(1+y)$ 可以应用 Beck 型有理逼近式([2])

$$\ln(1+x)\approx\sum_{k=1}^{m}\frac{\binom{m}{k}}{k\binom{2m}{k}}\left(\left(\frac{x}{1+x}\right)^k-(-x)^k\right). \tag{1·15}$$

于(1·14)中取 $m=4$, $x=y=1$, 其中 $\ln 2$ 按(1·15)计算,则求得

$$\ln 3\approx 1.0958445.$$

误差为 0.00277. 如果直接于(1·15)中取 $x=2$, 则求得 $\ln 3 \approx 1.0935744$. 其误差为 0.00504. 没有(1·14)精度高.

按(1·14)还可求得

$$e^{xy} \approx \frac{(2m)!+\sum_{k=1}^{m}(2m-k)!\binom{m}{k}y^k}{(2m)!+\sum_{k=1}^{m}(-1)^k y^k p_k(x)}. \tag{1·16}$$

若于(1·16)中取 $x=1$, 则得到关于 e^y 的近似表达式(1·4).

§2 Floyd 方法*

R. W. Floyd 方法是一种适用于被逼近函数 $f(x)$ 可以用充分高阶多项式较好地逼近的情况. 比如可设 $f(x)$ 是解析的, 于是它可以取 Taylor 或 Maclaurin 级数的截断多项式来逼近到任意程度. 当然, 对于有界闭区间 (不妨设为 [0, 1]) 上的连续函数, 我们可用它的 Бернштейн 多项式

$$B_f(x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

来逼近它.

以下假定 $p(x)$ 已是 $f(x)$ 的一个较好的逼近多项式, 它们于[−1, 1]上的误差可以忽略不计.

设 $T_{n+1}(x)$ 是 $n+1$ 次 Чебышев 多项式. 利用辗转相除的方法, 可以得到算式

$$\begin{aligned} p(x)&=q_0(x)\cdot T_{n+1}(x)+r_0(x),\\ T_{n+1}(x)&=q_1(x)\cdot r_0(x)+r_1(x),\\ r_0(x)&=q_2(x)\cdot r_1(x)+r_2(x),\\ r_1(x)&=q_3(x)\cdot r_2(x)+r_3(x),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{2·1}$$

*可参见参考文献[36].

其中 $r_i(x)$ 的次数是严格单调递减的. 从(2·1)式, 可知对任意 i, 均可写出

$$r_i(x)=a_i(x)\cdot p(x)+b_i(x)\cdot T_{n+1}(x), \tag{2·2}$$

其中 $a_i(x)$, $b_i(x)$ 由下述递推关系式所确定

$$\begin{aligned} a_i(x)&=a_{i-2}(x)-q_i(x)\cdot a_{i-1}(x),\ a_{-1}=0,\ a_{-2}=1,\\ b_i(x)&=b_{i-2}(x)-q_i(x)\cdot b_{i-1}(x),\ b_{-1}=1,\ b_{-2}=0. \end{aligned} \tag{2·3}$$

以 $a_i(x)$ 通除(2·2)式两边, 得到

$$p(x)=\frac{r_i(x)}{a_i(x)}-\frac{b_i(x)}{a_i(x)}T_{n+1}(x). \tag{2·4}$$

因而有理分式 $r_i(x)/a_i(x)$ 是 $p(x)$ 的一个有理逼近式, 而(2·4)中右端第二项为这个有理逼近的余项. 因为

$$|T_{n+1}(x)|\leqslant 1,\quad -1\leqslant x\leqslant 1,$$

所以逼近误差可以通过估计 $b_i(x)/a_i(x)$ 而求得.

如果 $b_i(x)/a_i(x)$ 几乎是一个常数, 则由(2·4)式可知 $r_i(x)/a_i(x)$ 几乎是 $p(x)$ 的一个最佳逼近分式.

当 $i=0$ 时, $a_i(x)\equiv 1$, 此时 $r_0(x)$ 就是 $f(x)$ 的一个多项式逼近.

例 设 $f(x)=e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots.$

取

$$\begin{aligned} p(x)=&1+x+0.5x^2+0.16666667x^3+0.04166667x^4\\ &+0.00833333x^5+0.00138889x^6+0.00019841x^7\\ &+0.00002480x^8+0.00000276x^9. \end{aligned}$$

于区间[−1, 1]上, $|p(x)-f(x)|\leqslant 3.0\times 10^{-7}$. 而 $T_7(x)=64x^7-112x^5+56x^3-7x$. 于是

$$q_0(x)=(317.5625+38.75x+4.3125x^2)\times 10^{-8},$$

$$r_0(x)=1+1.00002223x+0.50000271x^2$$
$$+0.16648913x^3+0.04164497x^4$$
$$+0.00868659x^5+0.00143229x^6,$$
$$|p(x)-r_0(x)|=|q_0(x)|\cdot|T_7(x)|$$
$$\leqslant 3.61\times 10^{-6},\quad -1\leqslant x\leqslant 1.$$
所以 $\quad |f(x)-r_0(x)|\leqslant 3.91\times 10^{-6},\quad -1\leqslant x\leqslant 1.$

用 $r_0(x)$ 除 $T_7(x)$，得

$$q_1(x)=-270998.81+44683.688x.$$
$$r_1(x)=270998.81+226314.15x+90815.458x^2$$
$$+22832.391x^3+3846.3890x^4+381.2048x^5.$$
$$a_0^{(x)}=1;\quad b_0^{(x)}=-q_0(x);$$
$$a_1(x)=-q_1(x);\quad b_1(x)=1+q_1(x)\cdot q_0(x).$$
所以

$$p(x)=\frac{r_1(x)}{a_1(x)}-\frac{b_1(x)}{a_1(x)}T_7(x)$$
$$=-\frac{r_1(x)}{q_1(x)}+\frac{1+q_1(x)q_0(x)}{q_1(x)}T_7(x).$$
其右端第二项于[-1, 1]上的误差上界算出为 8.121×10^{-7}.

从而 e^x 的有理逼近为

$$-r_1(x)/q_1(x)=\frac{\begin{bmatrix}(1+0.83511123x+0.33511386x^2\\+0.08425274x^3+0.01419338x^4\\+0.00140667x^5)\end{bmatrix}}{1-0.16488518x}.$$
其误差上界为 1.1×10^{-6}.

§3 Kopal 方 法

Z. Kopal 在文 [48] (25—43) 中给出了一类获得由下式(3·1)定义的函数之有理逼近的方法:

$$f(x)=\int_0^1 K(x,\ y)dy, \tag{3·1}$$

其中 $K(x, y)$是某一微分方程问题的解.

为了说明问题，仅以下述问题为例来介绍 Kopal 方法的基本思想. 设 $K(x, y)$满足

$$\begin{cases} A(x,\ y)\dfrac{\partial}{\partial y}K(x,\ y)+B(x,\ y)K(x,\ y)=0, \\ K(x,\ 0)=1, \end{cases} \tag{3·2}$$

其中 $A(x, y)$, $B(x, y)$是 x 和 y 的已知多项式.

如果(3·2)有形如(其中 $C_i(x)$, $P_i(y)$均为多项式)

$$K(x,\ y)=\sum_{i=0}^{n} C_i(x)P_i(y) \tag{3·3}$$

的解，那很好. 否则，我们希望它是当着我们把(3·2)换成

$$\begin{cases} A(x,\ y)\dfrac{\partial}{\partial y}K(x,\ y)+B(x,\ y)K(x,\ y)=Q(y), \\ K(x,\ 0)=1 \end{cases} \tag{3·4}$$

后这个新的微分方程问题的解，其中 $Q(y)$是在某种意义下“很小”的多项式.

既然由(3·3)式定义的二元多项式 $K(x, y)$是(3·4)的解，所以

$$A(x,\ y)\sum_{i=0}^{n} C_i(x)P'_i(y)+B(x,\ y)\sum_{i=0}^{n} C_i(x)P_i(y)\equiv Q(y). \tag{3·5}$$

比较上式两边的 y 各次方幂的系数，即可得到以多项式 $C_0(x)$, $C_1(x)$, …, $C_n(x)$为未知量，以 x 的一系列多项式为系数的“线性”方程组.

用 Cramer 规则求解该“线性”方程组，即可求出 $C_0(x)$, $C_1(x)$, …, $C_n(x)$的有理逼近式. 以这些有理逼近式代入(3·3)，于是 $K(x, y)$已经确定. 只须将 $K(x, y)$的这个近似

表达式代入(3·1)作一次积分，最后即可求得$f(x)$的有理逼近式.

今以$\log(1+t)$为例来说明 Kopal 方法.

显然

$$\log(1+t)=t\int_0^1\frac{dx}{1+tx}=t\int_0^1 K(x;t)dx, \qquad (3\cdot 6)$$

此处$K(x;t)$满足

$$\begin{cases}(1+tx)\dfrac{\partial}{\partial x}K(x;t)+tk(x;t)=0,\\ K(x;0)=1.\end{cases} \qquad (3\cdot 7)$$

设想把(3·7)中第一个方程改为

$$(1+tx)\frac{\partial}{\partial x}K(x;t)+tK(x;t)=\tau Q(x), \qquad (3\cdot 8)$$

其中τ很小,而

$$Q(x)=x^n+\alpha_1x^{n-1}+\alpha_2x^{n-2}+\cdots+\alpha_n.$$

假设

$$K(x;t)=\sum_{j=0}^{n}a_j(t)p_j(x) \qquad (3\cdot 9)$$

为(3·8)在初值条件$K(x;0)=1$下的解，其中$a_j(t)$和$p_j(x)$是多项式.

以(3·9)代入(3·8)式,并比较关于x的同次幂的系数,可得

$$a_j(t)=\tau\Gamma_{n-j}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n;t),\quad j=0,\ 1,\ \cdots,\ n, \quad (3\cdot 10)$$

其中$\Gamma_{n-j}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n;t)$是$t$的$n-j$次多项式. 按初值条件可知

$$\tau=\frac{1}{\Pi_n(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n;t)}, \qquad (3\cdot 11)$$

而$\Pi_n(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n)$是$t$的另一个$n$次多项式. 由(3·10)和(3·11)知

$$a_j(t)=\frac{\Gamma_{n-j}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n;\ t)}{\Pi_n(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n;\ t)},\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ n. \qquad (3\cdot 12)$$

于(3·9)式两边对 x 从 0 到 1 积分:

$$\int_0^1 K(x;t)dx=\sum_{j=0}^{n} a_j(t)\int_0^1 p_j(x)dx.$$

从而由(3·6)式,有

$$\log(1+t)\approx t\sum_{j=0}^{n}\frac{\Gamma_{n-j}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n;\ t)}{\Pi_n(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n;\ t)}\int_0^1 p_j(x)dx. \qquad (3\cdot 13)$$

如果取 $p_j(x)$ 是 Legendre 多项式 $p_j(2x-1)$, 则因其是[0, 1]上以 1 为权的直交多项式,所以

$$\log(1+t)\approx t\frac{\Gamma_n(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n;\ t)}{\Pi_n(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n;\ t)}. \qquad (3\cdot 14)$$

§4 Viskovatoff 方法*

Viskovatoff 方法的基本技巧是采用下述的变换关系式

$$\begin{aligned}\frac{p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots}{q_0+q_1x+q_2x^2+\cdots}&=\frac{p_0}{q_0}+\frac{p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots}{q_0+q_1x+q_2x^2+\cdots}-\frac{p_0}{q_0}\\&=\frac{p_0}{q_0}+\frac{x(p_0'+p_1'x+p_2'x^2+\cdots)}{q_0+q_1x+q_2x^2+\cdots}\\&=\frac{p_0}{q_0}+\frac{x}{\dfrac{q_0+q_1x+q_2x^2+\cdots}{p_0'+p_1'x+p_2'x^2+\cdots}}.\end{aligned}$$

特别地, 我们以 e^x 的连分式展开来说明 Viskovatoff 方法的具体步骤:

---

* 可参见参考文献[35]、[2].

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

$$=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+x+\cfrac{x^2}{2!}+\cfrac{x^3}{3!}+\cdots}-1}$$

$$=\cfrac{1}{1-\cfrac{x\left(1+\cfrac{x}{2!}+\cfrac{x^2}{3!}+\cfrac{x^3}{4!}+\cdots\right)}{1+x+\cfrac{x^2}{2!}+\cfrac{x^3}{3!}+\cdots}}$$

$$=\cfrac{1}{1-\cfrac{x}{1+\cfrac{1+x+\cfrac{x^2}{2!}+\cfrac{x^3}{3!}+\cdots}{1+\cfrac{x}{2!}+\cfrac{x^2}{3!}+\cfrac{x^3}{4!}+\cdots}-1}}$$

$$=\cfrac{1}{1-\cfrac{x}{1+\cfrac{x\left(\cfrac{1}{2}+\cfrac{x}{3}+\cfrac{x^2}{8}+\cdots\right)}{1+\cfrac{x}{2!}+\cfrac{x^2}{3!}+\cdots}}}$$

$$=\cfrac{1}{1-\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{2+\cfrac{1+\cfrac{x}{2!}+\cfrac{x^2}{3!}+\cdots}{\cfrac{1}{2}+\cfrac{x}{3}+\cfrac{x^2}{8}+\cdots}-2}}}=\cdots.$$

最后求得 e^x 的连分式展开式

$$e^x=\frac{1}{1}-\frac{x}{1}+\frac{x}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x}{2}-\frac{x}{5}+\cdots.$$

它在$(-\infty, \infty)$上收敛. 其渐近分式序列为

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{1-x},\ \frac{2+x}{2-x},\ \frac{6+2x}{6-4x+x^2},$$
$$\frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2},\ \frac{60+24x+3x^2}{60-36x+9x^2-x^3},\ \cdots$$

它们每个都是e^x的有理逼近式.

§5 Maehly 方 法*

Maehly 方法是 Padé 逼近方法的推广和改进. 它通常比 Padé 逼近的精确度高, 特别当被逼近函数的 Maclaurin 展开收敛较慢, 而它的 Чебышев 展开收敛较快时更是如此.

设$F(x)$于$[-1, 1]$上可展成绝对一致收敛的 Чебышев 级数

$$F(x)=\sum_{k=0}^{\infty} C_k T_k(x), \tag{5·1}$$

其中$T_k(x)=\cos(k\arccos x)$是 Чебышев 多项式.

构作有理分式函数

$$\begin{aligned} R_{m,n}(x)&=P_m(x)/Q_n(x)\\ &=\frac{p_0T_0(x)+p_1T_1(x)+\cdots+p_mT_m(x)}{q_0T_0(x)+q_1T_1(x)+\cdots+q_nT_n(x)}, \end{aligned} \tag{5·2}$$

使系数$p_0, p_1, \cdots, p_m; q_0, q_1, \cdots, q_n$是下述$m+n+1$个方程的齐次线性方程组的非平凡解

$$\begin{cases} p_0=q_0C_0+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{r=1}^{n} q_rC_r, \\ p_k=q_0C_k+\dfrac{1}{2}q_kC_0+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{r=1}^{n} q_r(C_{r+k}+C_{|r-k|}), \\ \qquad k=1, 2, \cdots, m+n, \end{cases} \tag{5·3}$$

---

* 可参见参考文献[35]、[52]、[23].

其中为书写方便，假定了

$$p_k=0\quad(k>m);\quad q_k=0\quad(k>n).$$

因为(5·3)中未知数个数大于方程个数，所以非平凡解自然存在.

与(5·3)等价地，乃是 $P_m(x)-Q_n(x)F(x)$ 的 Чебышев 级数的前 $m+n+1$ 项系数为 0. 事实上，从

$$\begin{aligned}
&P_m(x)-Q_n(x)F(x)\\
&=\sum_{k=0}^{m}p_kT_k(x)-\left(\sum_{r=0}^{n}q_rT_r(x)\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}C_kT_k(x)\right)\\
&=\sum_{k=0}^{m}p_kT_k(x)-\sum_{r=0}^{n}q_r\left(\sum_{k=0}^{\infty}C_kT_k(x)T_r(x)\right),
\end{aligned}$$

并注意 Чебышев 多项式的恒等式

$$T_r(x)T_k(x)=\frac{1}{2}\left(T_{r+k}(x)+T_{|r-k|}(x)\right),$$

我们有

$$\begin{aligned}
2\sum_{k=0}^{\infty}C_kT_r(x)T_k(x)&=\sum_{k=0}^{\infty}C_k\left(T_{r+k}(x)+T_{|r-k|}(x)\right)\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}C_kT_{r+k}(x)+\sum_{k=1}^{r-1}C_kT_{r-k}(x)\\
&\quad+\sum_{k=r+1}^{\infty}C_kT_{k-r}(x)+C_0T_r(x)+C_rT_0(x)\\
&=\sum_{k=r}^{\infty}C_{k-r}T_k(x)+\sum_{k=1}^{r-1}C_{r-k}T_k(x)\\
&\quad+\sum_{k=1}^{\infty}C_{k+r}T_k(x)+C_0T_r(x)+C_rT_0(x)\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_{r+k}+C_{|r-k|}\right)T_k(x)\\
&\quad+C_0T_r(x)+C_rT_0(x),
\end{aligned}$$

所以

$$
\begin{aligned}
&P_m(x)-Q_n(x)F(x)\\
&=\sum_{k=0}^{m}p_kT_k(x)-\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{n}q_r\Big[\sum_{k=1}^{\infty}(C_{r+k}+C_{|r-k|})T_k(x)\\
&\quad+C_0T_r(x)+C_rT_0(x)\Big]\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}p_kT_k(x)-\Big(q_0C_0+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}q_r\,C_r\Big)T_0(x)\\
&\quad-\sum_{k=1}^{\infty}\Big[q_0C_k+\frac{1}{2}C_0q_k\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}q_r\,(C_{r+k}+C_{|r-k|})\Big]T_k(x).
\end{aligned}
\tag{5·4}
$$

由关系式(5·4)不难看出，为使 $P_m(x)-Q_n(x)F(x)$ 的 Чебышев 级数的前 $m+n+1$ 项系数为 0，必须且只须方程组(5·3)成立.

设以 $\sum\limits_{k=m+n+1}^{\infty}d_kT_k(x)$ 表示 $P_m(x)-Q_n(x)f(x)$ 的 Чебышев 级数，则

$$d_{m+n+1}=C_{m+n+1}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_i(C_{m+n+i+1}+C_{m+n-i+1}).$$

于是误差函数为

$$R_{m,n}(x)-F(x)=\frac{1}{Q_n(x)}\sum_{k=m+n+1}^{\infty}d_kT_k(x).$$

由于常取 $q_0=1$，所以

$$R_{m,n}(x)-F(x)\approx d_{m+n+1}T_{m+n+1}(x).$$

从而 $R_{m,n}(x)$ 几乎是 $F(x)$ 的最佳逼近有理分式.

例 求函数 $\operatorname{th}\mu x$ 于区间$[-1, 1]$上的有理逼近式，$\mu=\frac{1}{2}\ln 3$. 我们的具体途径是用 Maehly 方法求出 $\frac{\operatorname{th}\mu x}{x}$ 的有

理逼近 $R_{2,4}(x)$，然后以 $x\cdot R_{2,4}(x)$ 作为 $\operatorname{th}\mu x$ 的有理逼近.

现在 $m=2$, $n=4$. 设 $\{C_k\}$ 是 $\frac{\operatorname{th}\mu x}{x}$ 的 Чебышев 级数的系数. 显然，由于 $\frac{\operatorname{th}\mu x}{x}$ 是偶函数，所以 C_k 中的奇数项等于0. 不难指出未知量 p_1, q_1 和 q_3 等于0. 如果把相应(5·3)的方程加以整理，可得

$$\begin{cases} p_0=q_0C_0+\frac{1}{2}q_2C_2+\frac{1}{2}q_4C_4, \\ p_2=q_0C_2+q_2\left(C_0+\frac{1}{2}C_4\right)+q_4\left(\frac{1}{2}C_2+\frac{1}{2}C_6\right), \\ 0=q_0C_4+q_2\left(\frac{1}{2}C_2+\frac{1}{2}C_6\right)+q_4\left(C_0+\frac{1}{2}C_8\right), \\ 0=q_0C_6+q_2\left(\frac{1}{2}C_4+\frac{1}{2}C_8\right)+q_4\left(\frac{1}{2}C_2+\frac{1}{2}C_{10}\right). \end{cases}$$

取定 $q_0=1$ 而去解 p_0, p_2, q_2 和 q_4，得到

$$\begin{aligned} P_2(x)&=0.52320016427T_0(x)+0.00739002644T_2(x) \\ &=0.51581013784+0.01478005287x^2, \\ Q_4(x)&=T_0(x)+0.06107956977T_2(x)+0.00010081226T_4(x) \\ &=0.93902124249+0.12135264149x^2 \\ &\quad+0.00080649804x^4. \end{aligned}$$

所以

$$R_{2,4}(x)=\frac{0.54930614399+0.01573984933x^2}{1+0.12923311636x^2+0.00085887093x^4}.$$

而 $\operatorname{th}\mu x(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 的有理逼近为 $xR_{2,4}(x)$. 下面给出相对误差上界的一个估计方法.

$$P_2(x)-Q_4(x)\frac{\operatorname{th}\mu x}{x}$$

的 Чебышев 级数中第一个非零系数项为

$$-\left[q_0C_8+\frac{1}{2}C_0q_8+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{4}q_r(C_{8+r}+C_{8-r})\right]T_8(x)$$

$$=-\left[q_0C_8+\frac{1}{2}q_2(C_6+C_{10})+\frac{1}{2}q_4(C_4+C_{12})\right]T_8(x)$$

$$=-0.310\times 10^{-9}\cdot T_8(x).$$

$\operatorname{th}\mu x$ 用 $xR_{2,4}(x)$ 逼近的相对误差为

$$\frac{xR_{2,4}(x)-\operatorname{th}\mu x}{\operatorname{th}\mu x}=\frac{1}{Q_4(x)}\frac{P_2(x)-Q_4(x)\dfrac{\operatorname{th}\mu x}{x}}{\dfrac{\operatorname{th}\mu x}{x}}$$

$$\approx\frac{-0.310\times 10^{-9}T_8(x)}{Q_4(x)\dfrac{\operatorname{th}\mu x}{x}}.$$

当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时,

$$Q_4(x)>0.93902,\quad \frac{\operatorname{th}\mu x}{x}\geqslant\operatorname{th}\mu.$$

因此

$$\left|\frac{-0.310\times 10^{-9}T_8(x)}{Q_4(x)\dfrac{\operatorname{th}\mu x}{x}}\right|\leqslant\frac{0.310\times 10^{-9}}{0.93902\cdot\operatorname{th}\mu}<0.67\times 10^{-9},$$

$-1\leqslant x\leqslant 1$. 它和最佳逼近有理分式的相对误差的估计 0.59×10^{-9} 相差无几.

§6 连分式展开的经济化方法*

如所知,一个函数的幂级数展开式可以利用 Чебышев 多项式的最小零偏差性质而引出所谓"经济化"技巧. 对于一个给定函数的收敛连分式展开来说,也有类似的经济化方法,用

* 可参见参考文献[52]、[35].

以获得该函数的比较好的有理逼近式. 这种方法是 H. J. Maehly 于文[52](1960 年)中提出的.

假设欲逼近的函数为 $F(x)(-1\leqslant x\leqslant 1)$. 它在$[-1, 1]$上有较好的收敛连分式展开

$$F(x)=\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2x}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+\ddots}}}, \tag{6·1}$$

或者

$$F(x)=\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2x^2}{b_2+\cfrac{a_3x^2}{b_3+\ddots}}},\quad \text{当 } F(x) \text{ 是偶函数时}, \tag{6·2}$$

或者

$$F(x)=\cfrac{a_1x}{b_1+\cfrac{a_2x^2}{b_2+\cfrac{a_3x^2}{b_3+\ddots}}},\quad \text{当 } F(x) \text{ 是奇函数时}. \tag{6·3}$$

先假定 $F(x)$既不是偶函数, 又不是奇函数, 则它的连分式展开为(6·1)式. 考虑连分式

$$\Gamma_n(x)=\cfrac{\alpha_1}{b_1+\cfrac{\alpha_2x}{b_2+\ddots+\cfrac{\alpha_nx}{b_n}}}, \tag{6·4}$$

其中 α_k $(k=1, 2, \cdots, n)$ 按下法确定. 仍以 $T_n(x)$记 n 阶 Чебышев 多项式, 因为 $T_n(x)$ 中 x^n 系数为 2^{n-1}, 所以

$$2^{-(n-1)}T_n(x)=x^n+t_{n-1}x^{n-1}+t_{n-2}x^{n-2}+\cdots+t_0, \tag{6·5}$$

其中 $t_0, t_1, \cdots, t_{n-1}$ 是确定的常数.

设 $$p_k=\frac{a_{k+1}}{b_kb_{k+1}},\quad k=1, 2, \cdots, n, \tag{6·6}$$

则 α_k 按下式确定

$$\alpha_k = a_k\left[1+(-1)^{n-k} t_{k-1} \prod_{r=k}^{n} p_r\right], \quad k=1, 2, \cdots, n. \quad (6\cdot7)$$

如此确定的截断连分式 $\Gamma_n(x)$ 就是 $F(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的一个有理逼近式. 实际上，$\Gamma_n(x)$ 几乎就是 $F(x)$ 的最佳一致逼近有理分式. 不难指出 $\Gamma_n(x)-F(x)$ 近似地等于一个很小的常数乘以 $T_n(x)$.

因为 $\Gamma_n(x)$ 是由 $F(x)$ 连分式展开的第 $n+1$ 阶渐近分式

$$C_{n+1}(x) = \cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2 x}{b_2+\ddots+\cfrac{a_{n+1}x}{b_{n+1}}}}$$

而引导出来的，所以把 $\Gamma_n(x)$ 称为由 $C_{n+1}(x)$ 经济化或嵌入而得到的有限连分式(有理逼近). 通常它要比 $F(x)$ 的第 n 阶渐近分式 $C_n(x)$ 的逼近程度为好.

当 $F(x)$ 是偶函数或奇函数时，相应经济化方法也是类似的. 对于 $F(x)$ 为偶函数的情况简要说明如下.

设 $F(x)$ 的连分式展开为

$$F(x) = \cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2 x^2}{b_2+\cfrac{a_3 x^2}{b_3+\ddots}}}.$$

考虑连分式 $\quad \Gamma_n(x) = \cfrac{\alpha_1}{b_1+\cfrac{\alpha_2 x^2}{b_2+\ddots+\cfrac{\alpha_n x^2}{b_n}}},$

其中 α_k 按下述方法确定. 设

$$2^{-(2n-1)}T_{2n}(x) = x^{2n} + t_{2n-2}x^{2n-2} + t_{2n-4}x^{2n-4} + \cdots + t_0,$$

此处 $T_{2n}(x)$ 是 $2n$ 次 Чебышев 多项式. 设 p_k 仍按(6·6)式定义,而 α_k 定义为

$$\alpha_k = a_k\left[1 - |t_{2k-2}| \prod_{r=k}^{n} p_r\right], \quad k=1, 2, \cdots, n.$$

此时 $\Gamma_n(x) - F(x)$ 近似地等于一个很小的常数乘以 $T_{2n}(x)$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$.

当 $F(x)$ 是奇函数时,它的连分式展开式为

$$F(x) = \cfrac{a_1 x}{b_1 + \cfrac{a_2 x^2}{b_2 + \cfrac{a_3 x^2}{b_3 + \ddots}}}.$$

考虑连分式 $$\Gamma_n(x) = \cfrac{\alpha_1 x}{b_1 + \cfrac{\alpha_2 x^2}{b_2 + \ddots + \cfrac{\alpha_n x^2}{b_n}}},$$

其中 α_k 按下述方法确定. 设

$$2^{-2n} T_{2n+1}(x) = x^{2n+1} + t_{2n-1} x^{2n-1} + t_{2n-3} x^{2n-3} + \cdots + t_1 x,$$

此处 $T_{2n+1}(x)$ 是 $2n+1$ 次 Чебышев 多项式. p_k 仍按(6·6)式定义,而 α_k 定义为

$$\alpha_k = a_k\left[1 - |t_{2k-1}| \prod_{r=k}^{n} p_r\right], \quad k=1, 2, \cdots, n.$$

有关有理函数经济化的进一步讨论, 请见 A. Ralston 的论文[58].

例 还是考虑 $\text{th}\,\mu x$ 在 $[-1, 1]$ 上的逼近问题, $\mu = \frac{1}{2}\ln 3$. 先考虑 $\frac{1}{x}\,\text{th}\,\mu x$ 的有理逼近 $R_{2,4}(x)$, 然后视 $xR_{2,4}(x)$ 为 $\text{th}\,\mu x$ 的有理逼近式.

$\frac{\text{th}\,\mu x}{x}$ 的连分式展开为

$$\frac{\operatorname{th}\mu x}{x}=\cfrac{\mu}{1+\cfrac{\mu^2x^2}{3+\cfrac{\mu^2x^2}{5+\cfrac{\mu^2x^2}{7+\ddots}}}},$$

其在$(-\infty, \infty)$上收敛.

采用偶函数的情况，$n=4$. 对于这个例子来说，常数 t_6, t_4, t_2 和 t_0 是下列多项式的系数

$$2^{-7}T_8(x)=x^8-2x^6+\frac{5}{4}x^4-\frac{1}{4}x^2+1.$$

常数 p_k 为

$$p_k=\frac{a_{k+1}}{b_kb_{k+1}}=\frac{\mu^2}{(2k-1)(2k+1)},\quad k=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

而且

$$\alpha_1=a_1[1-|t_0|p_1p_2p_3p_4]=0.54930614398,$$

$$\alpha_2=a_2[1-|t_2|p_2p_3p_4]=0.30173717755,$$

$$\alpha_3=a_3[1-|t_4|p_3p_4]=0.30172166663,$$

$$\alpha_4=a_4[1-|t_6|p_4]=0.29884691125.$$

渐近分式

$$\Gamma_4(x)=\cfrac{\alpha_1}{1+\cfrac{\alpha_2x^2}{3+\cfrac{\alpha_3x^2}{5+\cfrac{\alpha_4x^2}{7}}}}$$

$$=\frac{0.54930614398+0.01573941229x^2}{1+0.12923232014x^2+0.00085879260x^4}$$

它正是所要求的 $R_{2,4}(x)$. 用 $xR_{2,4}(x)$逼近 $\operatorname{th}\mu x$ 的相对误差上界为

$$\left|\frac{xR_{2,4}(x)-\operatorname{th}\mu x}{\operatorname{th}\mu x}\right|\leqslant 0.77\times10^{-9},\quad -1\leqslant x\leqslant 1.$$

它和最佳逼近的相对误差上界 0.59×10^{-9} 相差无几.

§7 QD 算　法*

QD 方法是专门为解决函数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n z^n \tag{7·1}$$

的有理逼近而设计的(见 Rutishauser[65]).

QD 方法大意是：根据形式幂级数(7·1)中的各系数 C_n，形成两个初始序列

$$\begin{aligned} &e_0^{(n)}=0, && n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots \\ &q_1^{(n)}=C_{n+1}/C_n, && n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \end{aligned} \tag{7·2}$$

然后形成序列

$$\begin{aligned} &e_k^{(n)}=[q_k^{(n+1)}-q_k^{(n)}]+e_{k-1}^{(n+1)}, && k=1,\ 2,\ \cdots;\ n=0,\ 1,\ \cdots \\ &q_{k+1}^{(n)}=q_k^{(n+1)}\cdot e_k^{(n+1)}/e_k^{(n)}, && k=1,\ 2,\ \cdots;\ n=0,\ 1,\ \cdots \end{aligned} \tag{7·3}$$

按照计算公式(7·2)和(7·3)，可以形成一张所谓 QD 表(见表 7.1).

例　设 $f(z)$ 由下述幂级数所定义

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}n!z^n.$$

则其 QD 表为

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & & & & & & \\
0 & & 1 & & & & & \\
 & 2 & & 2 & & & & \\
0 & & 1 & & 2 & & & \\
 & 3 & & 3 & & 3 & & \\
0 & & 1 & & 2 & & 3 & \\
\vdots & 4 & \vdots & 4 & \vdots & 4 & \vdots & 4 \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

当 QD 表存在时，由(7·1)所定义的 $f(z)$ 有如下的连分式展开式(见[27])

---

* 可参见参考文献[60]、[65]、[27].

表 7·1　QD 表

	$q_1^{(0)}$					
$e_0^{(1)}$		$e_1^{(0)}$				
	$q_1^{(1)}$		$q_2^{(0)}$			
$e_0^{(2)}$		$e_1^{(1)}$		$e_2^{(0)}$		
	$q_1^{(2)}$		$q_2^{(1)}$		$q_3^{(0)}$	
$e_0^{(3)}$		$e_1^{(2)}$		$e_2^{(1)}$		$e_3^{(0)}$
$\vdots$	$q_1^{(3)}$	$\vdots$	$q_2^{(2)}$	$\vdots$	$q_3^{(1)}$	$\vdots$
	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	

$$\frac{C_0}{1}-\frac{q_1^{(0)}z}{1}-\frac{e_1^{(0)}z}{1}-\frac{q_2^{(0)}z}{1}-\frac{e_2^{(0)}z}{1}-\cdots. \tag{7·4}$$

这就是 QD 算法的总的轮廓.

[60]中定理 1 指出, 为使如上 QD 表格存在, 必须且只须下述 Hankel 行列式不为零:

$$H_k^{(n)}=\begin{vmatrix} C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{n+k-1} \\ C_{n+1} & C_{n+2} & \cdots & C_{n+k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ C_{n+k-1} & C_{n+k} & \cdots & C_{n+2k-2} \end{vmatrix}\neq 0, \tag{7·5}$$

$$k=1,\ 2,\ \cdots;\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

并且此时 QD 序列与 Hankel 行列式有下列关系式成立:

$$\left.\begin{aligned} q_k^{(n)}&=\frac{H_k^{(n+1)}\cdot H_{k-1}^{(n)}}{H_k^{(n)}\cdot H_{k-1}^{(n+1)}}, \\ e_k^{(n)}&=\frac{H_{k+1}^{(n)}\cdot H_{k-1}^{(n+1)}}{H_k^{(n)}\cdot H_k^{(n+1)}} \end{aligned}\right\} \quad k=1,2,\cdots;\ n=0,1,\cdots. \tag{7·6}$$

显然并不是对一切形式幂级数(7·1)都会有QD序列(7·2)、(7·3)存在的．事实上，比如当

$$f(z)=1+z^2+z^4+\cdots$$

时，其QD序列(7·2)和(7·3)就不存在．为此，于[60]中P. Henrici讨论了所谓摄动QD格式．

摄动QD格式的基本思想是转而考虑(7·1)的摄动形式的幂级数

$$\tilde{f}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z+\varepsilon)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{C}_n z^n, \qquad (7\cdot 7)$$

其中 $\widetilde{C}_n$ 按二项式定理为

$$\widetilde{C}_n=\binom{n}{n}C_n+\binom{n+1}{n}C_{n+1}\varepsilon+\binom{n+2}{n}C_{n+2}\cdot\varepsilon^2+\cdots.$$

然后考虑 $\tilde{f}(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\widetilde{C}_n z^n$ 的QD格式等等．有关摄动QD格式的详细讨论，请参阅[60]．[60]中还讨论了如何利用QD方法来获得超越函数的零点和极点的问题．

§8 ε-算 法*

对于给定的序列

$$S_0,\ S_1,\ \cdots,\ S_j,\ \cdots, \qquad (8\cdot 1)$$

ε-算法的基本关系是

$$\begin{aligned}&\varepsilon_0^{(j)}=S_j,\ \varepsilon_{-1}^{(j)}=0,\\ &\varepsilon_{k+1}^{(j)}=\varepsilon_{k-1}^{(j+1)}+\frac{1}{\varepsilon_k^{(j+1)}-\varepsilon_k^{(j)}},\end{aligned} \qquad j=0,1,\cdots;k=0,1,\cdots. \quad (8\cdot 2)$$

ε-算法是D. Shanks[71]和P. Wynn[83]为了提高序列的收敛速度而设计的．我们这里主要考虑它在数值有理逼近中的应用．如果 S_j 是下述形式幂级数

* 可参见参考文献[71]、[82]、[83]．

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i x^i \tag{8·3}$$

的前 $j+1$ 项的部分和于 $x=x_0$ 点的值

$$S_j=\sum_{i=0}^{j}a_i x_0^i. \tag{8·4}$$

D. Shanks[71] 和 P. Wynn[83] 曾经指出 ε–算法与 Padé 逼近方法的重要联系

$$\varepsilon_{2k}^{(j)}=[k+j/k]_{f(x)}(x_0). \tag{8·5}$$

即 $\varepsilon_{2k}^{(j)}$ 是 $f(x)$ 的 $[k+j/k]$ 级 Padé 逼近于点 $x=x_0$ 处的值. 所以 ε–算法至少可以作为寻求在某点处 $f(x)$ Padé 逼近值的一种有效方法.

在实际应用时，常把 ε–算法所生成的二维数组列成一个所谓 ε–阵列:

$$\begin{array}{ccccc}
\varepsilon_{-1}^{(0)} & & & & \\
 & \varepsilon_{0}^{(0)} & & & \\
\varepsilon_{-1}^{(1)} & & \varepsilon_{1}^{(0)} & & \\
 & \varepsilon_{0}^{(1)} & & \varepsilon_{2}^{(0)} & \\
\varepsilon_{-1}^{(2)} & & \varepsilon_{1}^{(1)} & & \varepsilon_{3}^{(0)} \\
 & \varepsilon_{0}^{(2)} & & \varepsilon_{2}^{(1)} & \vdots \ \ddots \\
\varepsilon_{-1}^{(3)} & & \varepsilon_{1}^{(2)} & \vdots & \\
 & \varepsilon_{0}^{(3)} & \vdots & & \\
\varepsilon_{-1}^{(4)} & \vdots & & & \\
\vdots & & & &
\end{array} \tag{8·6}$$

考虑 ε–阵列中的一块

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \varepsilon_{2r}^{(m-1)} & & \\
 & \varepsilon_{2r-1}^{(m)} & & \varepsilon_{2r+1}^{(m-1)} & \\
\varepsilon_{2r-2}^{(m+1)} & & \varepsilon_{2r}^{(m)} & & \varepsilon_{2r+2}^{(m-1)} \\
 & \varepsilon_{2r-1}^{(m+1)} & & \varepsilon_{2r+1}^{(m)} & \\
 & & \varepsilon_{2r}^{(m+1)} & &
\end{array} \tag{8·7}$$

按照公式(8·2)，可知

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{2r+1}^{(m-1)}-\varepsilon_{2r-1}^{(m)}&=\left(\varepsilon_{2r}^{(m)}-\varepsilon_{2r}^{(m-1)}\right)^{-1},\\
\varepsilon_{2r+1}^{(m)}-\varepsilon_{2r-1}^{(m+1)}&=\left(\varepsilon_{2r}^{(m+1)}-\varepsilon_{2r}^{(m)}\right)^{-1}.
\end{aligned} \tag{8·8}$$

上两式左、右两边分别相减，并利用递推关系式(8·2)即可得

$$(\varepsilon_{2r+2}^{(m-1)}-\varepsilon_{2r}^{(m)})^{-1}-(\varepsilon_{2r}^{(m)}-\varepsilon_{2r-1}^{(m+1)})^{-1}$$
$$=(\varepsilon_{2r}^{(m+1)}-\varepsilon_{2r}^{(m)})^{-1}-(\varepsilon_{2r}^{(m)}-\varepsilon_{2r}^{(m-1)})^{-1}. \qquad (8\cdot9)$$

令 $r=i,\ m+r=j(i,\ j=0,\ 1,\ \cdots)$，再根据 ε 序列和 Padé 逼近的关系式(8·5)，便可得到 Padé 逼近的 Wynn 恒等式(第三章(2·20)式)

$$([i+1/j]-[i/j])^{-1}-([i/j]-[i-1/j])^{-1}$$
$$=([i/j+1]-[i/j])^{-1}-([i/j]-[i/j-1])^{-1},$$
$$i=0,\ 1,\ \cdots;\ j=0,\ 1,\ \cdots. \qquad (8\cdot10)$$

它指明了在 Padé 表中，相邻接五个 Padé 逼近的关系. 若记它们为

$$\begin{matrix} & N & \\ W & C & E \\ & S & \end{matrix}$$

则(8·10)式，即指出了

$$(C-N)^{-1}+(C-S)^{-1}=(C-W)^{-1}+(C-E)^{-1}. \quad (8\cdot11)$$

假定 N, E, W 和 S 为已知，则由(8·11)表示的可看作是 C 的一个 2 次方程. 由此还可讨论处在中心位置的 C 唯一存在的条件. 这当然是很有趣的事情(参阅[83]).

§9 Hamming 直接方法*

R. W. Hamming 方法是一种发现有理逼近形式的方法. 也是一种有理插值法.

设已知型值点$(x_j,\ y_j)$，$j=1,\ 2,\ \cdots$，欲用有理分式来逼

---

* 可参见参考文献[43].

近由该型值点所表征的函数 $f(x)$. 若不是已知型值点，而是已知函数 $f(x)$，则问题更简单. 设有理函数的形式为

$$R(x)=\frac{N(x)}{D(x)}=\frac{N(x)}{1+d_1x+\cdots}, \tag{9·1}$$

其中 $N(x)$, $D(x)$ 为 x 的多项式，且 $D(0)=1$.

为了发现 $R(x)$ 的分子、分母多项式的次数，只须于

$$f(x)\approx\frac{N(x)}{1+d_1x+\cdots}$$

两边取对数，可得

$$\log f(x_j)\approx\log N(x_j)-\log(1+d_1x_j+\cdots),\quad j=1,\ 2,\ \cdots.$$

如果 $N(x)=C_rx^r+C_{r+1}x^{r+1}+\cdots$, $C_r\neq0$, 则

$$\log f(x_j)\approx\log C_r+r\log x_j+\log\left(1+\frac{C_{r+1}}{C_r}x_j+\cdots\right)$$
$$-\log(1+d_1x_j+\cdots).$$

当 x_j 较小时，$\log f(x_j)$ 作为 $\log x_j$ 的线性函数的斜率值(取整数部分) r 就取为分子 $N(x)$ 的最低方次. 于是 $R(x)$ 应形如

$$R(x)=\frac{a_rx^r+\cdots}{1+d_1x+\cdots}.$$

究竟 $R(x)$ 的分子、分母应该是 x 的多少次多项式，那还应该进一步考察当 x_j 增大时 y_j 的变化趋势. 如果 y_j 随 x_j 的增大而增大(减小)时，则分子 $N(x)$ 的次数应比分母 $D(x)$ 的次数为大(小). 鉴于 Padé 表中主对角线附近的 Padé 逼近精确度较好的事实，我们常常取分子、分母的次数相差为 1. 例如

$$R(x)=\frac{a_rx^r+\cdots+a_{k+1}x^{k+1}}{1+d_1x+\cdots+d_kx^k}$$

或

$$R(x)=\frac{a_rx^r+\cdots+a_{k-1}x^{k-1}}{1+d_1x+\cdots+d_kx^k} \tag{9·2}$$

等等.

至于 k 到底取多大，这要看数据本身的特点和个数来确定.

如果 k 已经确定，则 $R(x)$ 中的参数个数为 $2(k+1)-r$. 因此为作有理插值，应选取 $2(k+1)-r$ 个型值点. 当然这些型值点应该选取对决定函数形状比较关键的一批点. 这往往可以用绘图的办法来确定.

以上问题全部解决以后，剩下的只是一个有理插值问题

$$R(x_j)=f(x_j),\quad j=1,\cdots,2(k+1)-r. \tag{9·3}$$

Hamming 建议把(9·3)线性化为

$$D(x_j)f(x_j)=N(x_j),\ j=1,\cdots,2(k+1)-r \tag{9·4}$$

来求解. 从而得到 $f(x)$ 的有理逼近式.

在第一章中，已经给出了(9·3)和(9·4)等价转化的条件.

§10 最小二乘法*

一般说来，型值点 $(x_j, f(x_j))$, $j=1,\cdots,M$ 要比有理分式 $R(x)=N(x)/D(x)$ 中的参数多得多. 如果把所有型值点都用上，则常采用最小二乘法. 即求解下述极小值问题

$$\sum_{j=1}^{M}\left[f(x_j)-\frac{N(x_j)}{D(x_j)}\right]^2=\min. \tag{10·1}$$

因为在一般情况下，由(10·1)所导出的法方程组是一个非线性方程组，从而它的求解也是比较困难的. Hamming 在[43]中建议求解(10·1)的逐步线性化变形：取 $D_0(x)\equiv1$，并按求解下列极小值问题来形成 $D_1(x)$, $D_2(x)$, $\cdots$, $D_k(x)$, $\cdots$

---

* 可参见参考文献[43].

$$\sum_{j=1}^{M} \frac{1}{D_{k-1}^2(x_j)} [D_k(x_j) f(x_j) - N(x_j)]^2 = \min, \quad k=1, 2, \cdots \tag{10·2}$$

当前后两 $D_k(x)$ 在给定精度内系数完全重合为止. 此时求出与该 $D_k(x)$ 相应的 $N(x)$, 即得有理逼近式 $R(x)=N(x)/D(x)$. 该法收敛很快,但有时不甚稳定.

参 考 文 献

[1] H. И. 阿赫叶慈尔，逼近论讲义，程民德等译，科学出版社，1957.

[2] A. H. 哈凡斯基，连分式及其推广在近似分析问题上的应用，叶乃膺译，科学出版社，1962.

[3] 徐利治，周蕴时，高维的数值积分，科学出版社，1980.

[4] 徐利治，王仁宏，周蕴时，边界型求积公式的构造方法及应用，计算数学，№ **3** (1978), 54—75.

[5] 王仁宏，具有约束的有理逼近，吉林大学自然科学学报，№ **1** (1979), 19—25.

[6] 王仁宏，吴顺唐，关于有理 Spline 函数，吉林大学自然科学学报，№ **1** (1978), 58—70.

[7] 王仁宏，多元齿的结构与插值，数学学报，Vol. 18, № **2**(1975), 91—106.

[8] 王仁宏，任意剖分下的多元样条分析，中国科学，数学专辑 (I)，1979, 215—226.

[9] 王仁宏，有理逼近的理论与方法，逼近论会议论文集，杭州大学出版，1978, pp. 61—71.

[10] 王仁宏，梁学章，二元连续函数在某些多项式类上的一致逼近理论，吉林大学自然科学学报，№ **2** (1965), 1—10.

[11] 王仁宏，周蕴时，程少春，一种光滑插值方法及其应用，吉林大学自然科学学报，№ **3** (1978), 68—72.

[12] 沈燮昌，Müntz 定理及其推广，逼近论会议论文集，杭州大学出版，1978, pp. 6—24.

[13] J. Bak and D. J. Newman, Rational Combinations of x^{λ_k}, $\lambda_k \geqslant 0$ are always dense in $C[0, 1]$, *Jour. Approx. Theory*, **23**(1978), 155—157.

[14] G. A. Baker, Jr., Essentials of Padé Approximants, Acad. Press, New York San Francisco London, 1975.

[15] R. Barrar and H. L. Loeb, Best non-linear uniform Approximation with interpolation, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **33** (1969), 231—237.

[16] I. Barrodale, M. J. D. Powell and F. D. K. Roberts, The differential correction algorithm for rational l_∞-approximation, *SIAM Jour. Numer. Anal.*, **9** (1972), 493—504.

[17] B. Boehm, Existence of best rational Tchebycheff approximations, *Pac. J. Math.*, **15** (1965), 19—28.

[18] D. Braess, On rational L_2-approximation, *Jour. Approx. Theory*, **18** (1976), 136—151.

[19] C. Brezinski, Computation of Padé Approximations and Continued fractions, *Jour. Comput. & Appl. Math.*, Vol. 2, № **2** (1976), 113—123.

[20] H. Cabannes, Padé Approximants Method and its Applications to Mechanics, Springer-Verlag, Berlin· Heidelberg· New York, 1976.

[21] W. B. Carver, Systems of linear inequalities, *Ann. Math.*, **23** (1922), 212—220.

[22] E. W. Cheney, Approximation by generalized rational functions, 刊于"*Approximation of Functions*" (ed. H. L. Garabedian), Elsevier, Amsterdam, 1965, pp. 101—110.

[23] E. W. Cheney, Introduction to Approximation Theory, McGraw-Hill, New York, 1966.

[24] E. W. Cheney and H. L. Loeb, Two New Algorithms for Rational Approximation, *Numer. Math.*, **3** (1961), 72—75; On Rational Chebyshev Approximation, *Numer. Math.*, **4** (1962), 124—127.

[25] E. W. Cheney and H. L. Loeb, Generalized rational approximation, *SIAM Jour. Numer. Anal.*, **1** (1964), 11—25.

[26] E. W. Cheney and H. L. Loeb, On the continuity of rational approximation operators, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **21** (1965), 391—401.

[27] E. W. Cheney and T. H. Southard, A Survey of Methods for Rational Approximation, etc., *SIAM Review*, **5** (1963), 219—231.

[28] G. Claessens, A useful identity for the rational Hermite interpolation Table, *Numer. Math.*, **29** (1978), 227—231.

[29] W. J. Cody and J. Stoer, Rational Chebyshev Approximation using interpolation, *Numer. Math.*, **9** (1966), 177—188.

[30] F. Deutsch, On uniform approximation with interpolatory Constraints, *Jour. Math. Anal. Appl.*, **24** (1968), 62—79.

[31] S. N. Dua and H. L. Loeb, Further remarks on the differential Correction algorithm, *SIAM Jour. Numer. Anal.*, **10** (1973), 123—126.

[32] C. B. Dunham, Nonexistence of best Rational Approximations on

subset, *Jour. Approx. Theory,* **14** (1975), 160—161.

[33] C. B. Dunham, Rational approximation with a vanishing weight function and with a fixed value at zero, *Math. Comput.*, **30** (1970), 45—47.

[34] K. Fan, On systems of linear inequalities, "Linear inequalities and related systems", *Annals of Mathematics Studies,* № **38**, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1956, pp. 94—156.

[35] C. T. Fike, Computer Evaluation of Mathematical functions, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J. 1968.

[36] R. W. Floyd, A note on rational approximation, *Math. Comput.*, **14** (1960), 72—73.

[37] P. Fox, A. A. Goldstein and G. Lastman, Rational approximations on finite point sets, 刊于 "*Approximation of Functions*" (ed. H. L. Garabedian), Elsevier, Amsterdam, 1965, pp. 57—67.

[38] W. Fraser and J. F. Hart, On the Computation of rational approximations to continuous functions, *Comm. ACM,* **5** (1962), 401—403, 414.

[39] M. Gallucci and W. B. Jones, Rational approximation Corresponding to Newton Series (Newton-Padé approximations), *Jour. Approx. Theory,* **17** (1976), 366—392.

[40] C. Geiger, Über eine Klasse rationaler Tschebyscheff-Approximationen mit Nebenbedingungen, *Jour. Approx. Theory,* **1** (1968), 340—354.

[41] A. A. Goldstein and E. W. Cheney, A finite algorithm for the solution of linear equations and inequalities and for the Tchebycheff-Approximation of inconsistent linear equation, *Pac. J. Math.*, **8** (1958), 415—427.

[42] W. B. Gragg, The Padé table and its relation to Certain algorithms of numerical analysis, *SIAM Review,* **14** (1972), 1—62.

[43] R. W. Hamming, Numerical Methods for Scientists and Engineers, Second Edition, Printed in the USA, 1973.

[44] P. Henrici, Discrete variable methods in ordinary differential equations, John Wiley & Sons, New York, 1962.

[45] K. H. Hoffmann, Zur theorie der nichtlinearen Tschebyscheff-Approximation mit Neberbedingungen, *Numer. Math.*, **14** (1969), 24—41.

[46] P. M. Hummel and C. L. Seebeck, A generalization of Taylor's theorem, *Amer. Math. Monthly*, **56** (1949), 243—247.

[47] B. Lam, A note on best uniform rational approximation, *SIAM Jour. Numer. Anal.*, **13** (*1976*), *962—965.*

[48] R. E. Langer, On Numerical Approximation, The University of Wisconsin Press, Madison, 1959.

[49] H. L. Loeb, Algorithms for Chebyshev approximations using the ratio of linear forms, *Jour. Soc. Indust. Appl. Math.*, Vol. **8** (1960), 458—465.

[50] Y. L. Luke, Chebyshev expansions and rational approximation, *Jour. of Comput. & Appl. Math.*, **2** *(1976), 85—93.*

[51] N. Macon and D. E. Dupree, Existence and uniqueness of interpolating rational functions, *The Amer. Math. Monthly*, **69** (1962), 751—759.

[52] H. J. Maehly, Methods for fitting rational approximations, Part I., *Jour. Assoc. Comput. Mach.*, **7** (1960), 150—162; Parts II and III, *Jour. Assoc. Comput. Mach.*, **10** (1963), 257—277.

[53] G. Meinardus, Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung, Springer-Verlag, Berlin· Göttingen· Heidelberg· New York, 1964.

[54] N. Obrechkoff, Sur les Moyennes Arithmetiques de la Série de Taylor, C. R. Acad. Sci. Paris, 210 (1940), 526—528.

[55] A. Perrie, Uniform rational approximation with Osculatory interpolation, *Jour. Comput. & Sys. Sci.*, **4** (1970), 509—522.

[56] O. Perron, Die Lehre Von den Kettenbruchen, B. G. Teubner, Stuttgart, 1954, Vol. I, pp. 5—7.

[57] P. P. Petrushev, On the rational approximation of functions with convex r-th derivative, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **28** (1976), № **3—4**, 315—320.

[58] A. Ralston, On economization of rational functions, *Jour. Assoc. Comput. Mach.*, **10** (1963), 278—282.

[59] A. Ralston, Rational Chebyshev approximation by Remes' algorithms, *Numer. Math.*, **7** (1965), 322—330.

[60] A. Ralston and H. S. Wilf, Mathematical Methods for Digital Computers, Vol. II, John Wiley & Sons, Inc., 1968.

[61] A. R. Reddy, Rational approximation to $e^{-|x|}$, Proc. Kon. Ned. Akad.

Wetensch. Ser. A, Vol. 39 (1977), 338—341.

[62] A. R. Reddy, Recent advances in Chebyshev rational approximation on finite and infinite intervals, *Jour. Approx. Theory*, Vol. 22, № 1 (1978), 59—84.

[63] J. R. Rice, *The Approximation of Functions*, Vol. **I**, Vol. **II**, Addison-Wesley, 1964, 1969.

[64] T. J. Rivlin, An introduction to the Approximation of functions, Blaisdell Publ. Co., 1969.

[65] H. Rutishauser, Anwendungen des Quotienten-Differenzen Algorithmus, *Z. Angew. Math. Physik*, **5** (1954), 496—507.

[66] H. E. Salzer, Note on osculatory rational interpolation, *Math. Comput.*, Vol. **16** (1962), 486—491.

[67] R. Sauer, et al., Mathematische Hilfsmittel des ingenieurs, Teil III, Die Grundlehren der Math. Wissenschaften, Band 141, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1968.

[68] R. Schaback, Spezielle rational Splinefunktionen, *Jour. Approx. Theory*, **7** (1973), 281—292.

[69] R. Schaback, Calculation of best approximations by rational splines, "Approximation Theory II" (Eds. G. G. Lorentz, C. K. Chui, L. L. Schumaker), Acad. Press, New York, 1976, pp. 533—539.

[70] I. J. Schoenberg, Contributions to the problem of approximation of equidstant data by analytic functions, Part A and B, *Quart. Appl. Math.*, **4** (1946), 45—99, 112—141.

[71] D. Shanks, Nonlinear transformations of divergent and Slowly Convergent sequences, *Jour. Math. and Phys.*, **34** (1955), 1—42.

[72] J. Stoer, Über Zwei Algorithmen Zur interpolation mit rational Funktionen, *Numer. Math.*, **3** (1961), 285—304.

[73] J. Stoer, A direct method for Chebyshev approximation by rational functions, *Jour. Assoc. Comput. Mach.*, **11** (1964), 59—69.

[74] G. D. Taylor and J. Williams, Existence questions for the problem of Chebyshev approximation by interpolating rationals, *Math. Comput.*, **28** (1974), 1097—1103.

[75] J. L. Walsh, Padé Approximants as limits of rational functions of best Approximation, Real Domain, *Jour. Approx Theory*, **11** (1974), 225—230.

[76] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, 4th. ed., Cambridge, 1950.

[77] J. Williams, Numerical Chebyshev approximation by interpolating rationals, *Math. Comput.*, **26** (1972), 199—206.

[78] D. Wulbert, Nonlinear approximation with tangential Characterization, *Amer. J. Math.*, **93** (1971), 718—730.

[79] L. Wuytack, Kolmogoroff's Criterion for Constrained rational approximation, *Jour. Approx. Theory*, **4** (1970), 120—136.

[80] L. Wuytack, On the osculatory rational interpolation problem, *Math. Comput.*, **29** (1975), 837—843.

[81] L. Wuytack, On Some aspects of the rational interpolation problem, *SIAM Jour. Numer. Anal.*, **11** (1974), 52—60.

[82] P. Wynn, On a device for Computing the $e_m(S_n)$ Transformation, *Math. Comput.*, **10** (1956), 91—96.

[83] P. Wynn, Upon systems of recursions which obtain Among the quotients of the Padé table, *Numer. Math.*, **8** (1966), 264—269.

[General Information]
书名=数值有理逼近
作者=王仁宏
页数=181
SS号=10184177
DX号=
出版日期=1980年08月第1版
出版社=上海科学技术出版社

参考文献